المؤتمر العلمي الثاني
لطلاب المرحلة الجامعية والدراسات العليا
الجامعة الأسمرية الإسلامية 1446هـ- 2024م

دراسة مقارنة لبعض طرق التكامل العددي المحدود باستخدام برنامج MAPLE

إلهام أحمد غيث* و نجلاء جمال العويص*

قسم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

*البريد الإلكتروني: e.gieth@asmarya.edu.ly

A Comparative Study of Some Methods of Definite Numerical Integration Using Maple Software

Elham A. Ghaith* and Najla J. Alawiss

Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasmarya Islamic University, Zliten, Libya.

الملخص

يعرف التكامل العددي بأنه كيفية إيجاد القيمة التقريبية لتكامل معين ويتم اللجوء إليه عادةً عندما تكون هناك صعوبة أو أنه لا يمكن حساب قيمة التكامل بالطرق المعتادة، أو عندما تكون صيغة الدالة غير معلومة وإنما معلوم قيمها عند عدد محدود من النقاط. تهدف هذه الدراسة إلى المقارنة بين ثلاثة من طرق التكامل العددي وهي (طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون وطريقة رومبرج) من أجل الوصول إلى الطريقة الأفضل من حيث دقة النتائج وسرعة التقارب إلى القيمة الدقيقة للتكاملات، كما تهدف أيضاً إلى دراسة تأثير زيادة عدد تقسيمات الفترة وإشارة حدود التكامل والشكل الرياضي للدالة على دقة نتائج كل طريقة. وقد تمت المقارنة باستخدام برنامج Maple 18 في حساب القيم الدقيقة والتقريبية (مقربة إلى تسعة أرقام عشرية بعد الفاصلة) وحساب الخطأ المطلق لعدد من التكاملات الأحادية لدوال متنوعة الشكل الرياضي ومستمرة في فترات تكاملها. من أهم النتائج التي تم الوصول إليها أن طريقة شبه المنحرف يكون تقارب نتائجها من القيم الدقيقة لتكاملات الدوال المثلثية والدوال متعددة التعريف أسرع من الطرق الأخرى؛ وبالنسبة للتكاملات الأخرى (المجرى عليها الدراسة) فإن طريقة رومبرج هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة التقارب وتأتي طريقة سمبسون في المرتبة الثانية. ومن النتائج العددية يمكن أن نستنتج أن زيادة عدد تقسيمات الفترة لا تؤدي دائماً إلى زيادة دقة النتائج لكل التكاملات، وأنه عندما يقع منحنى الدالة في الربع الأول فإن الطرق المدروسة تعطي نتائج دقيقة جداً مقارنةً بما إذا كان يقع في الربعين الأول والثاني معاً أو في الربع الثاني والذي تحصلنا فيه على أقل دقة للطرق.

الكلمات الدالة: التكامل العددي، صيغ نيوتن- كوتس، قاعدة شبه المنحرف، قاعدة سمسون، طريقة رومبرج.

Abstract

Numerical Integration is defined as how to find the approximate value of a given integral it is usually resorting to when there is difficulty or it is not possible to calculate the value of the integral using the usual methods, or when the formula of the function is not known but its values are known at a finite number of points. This study aims to compare between three numerical integration methods which are (the Trapezoid Method, the Simpson's Method and Romberg's Method) to get to the best method in terms of accuracy of results and speed of convergence to exact value. And it also aims to effect of increasing the number of division of the period and the integration limit sign and type of the mathematical form of the function on the accuracy. The comparison was completed by using the Maple 18 Program in calculating the exact and approximate values (rounded to nine decimal digits after the comma) and calculate the absolute error of a number of single integrals of various functions in mathematical forms and continuing in its periods of integration. From the results reached is that the Trapezoid method have their results converging to the exact value of the integrals of trigonometric and multi-definition functions faster than other methods. As for the integrals of other functions (that are being studied) the Romberg's method is the best method and the Simpson's method comes in second place. Also increasing the number of division of the period does not always lead to an increase in the accuracy of the results for all integrals, And that when the function curve falls in the first quadrant, the methods of numerical integration gives very accurate results compared to whether the function curve falls in the first and second quadrants together or in the second quadrant which we got the lowest accuracy of the methods.

Keywords: *Numerical Integration, Newton-Cotes, Trapezoidal Rule, Simpson's Rule, Romberg Method.*

1. المقدمة

التكامل هو من أحد أهم المفاهيم الرياضـية وهو مصـطلح يطلق على عملية إيجاد قيمة التكاملات، ويوجد نوعان من التكامل تكامل غير محدود وتكامل محدود; النوع الأول يسـمى الدالة الأصـلية وهو عكس المشـتقة، وعند التعويض بحدود الفترة المكامل عليها نحصل على التكامل المحدود. هندسـياً وفي المسـتوى يمكن فهمه على أنه المسـاحة بين منحنى الدالة ومحور السـينات وبالتالي فهو يعين المسـاحة بالإضـافة أيضـاً أننا منه نسـتطيع أن نعين الحجم والأشـياء الأخرى الناتجة عن الجمع بين البيانات اللامتناهية الصـغر. ومع ذلك، لا يمكن حسـاب العديد من التكاملات باسـتخدام أسـاليب الرياضـيات التحليلية ولهذا السـبب تم إنشـاء طريقة أخرى تسـمى التكامل العددي الغرض منه هو إيجاد تقريب للتكامل المطلوب (Winnicka, 2019 ; Chowdhury et al., 2021) .

تم صياغة مصطلح التكامل العددي لأول مرة في عام 1915م من قبل David Gibb في كتيب من تأليفه والمسـمى A Cours in Interpolation and Numeric Integration for the Mathematical Laboratory.

وتشـــمل طرق التكامل العددي على صـــيغ نيوتن كوتس وصـــيغ جاوس للتكامل وتكامل المونت كارلو وصـيغة اويلر ماكلورين، قد تعرف صـيغ نيوتن كوتس بقواعد أو قوانين نيوتن كوتس وهي تركز بشـكل خاص على حساب التكامل لدالة عن طريق قيم الدالة عند نقاط متساوية المسافات فيما بينها وتسمى هذه النقاط بنقاط الأســاس ويوجد شــكلان لصــيغ نيوتن كوتس مغلقة ومفتوحة، تســمى مغلقة إذا كانت حدود التكامل ضمن نقاط الأساس ومفتوحة إذا كانت حدود التكامل ليست ضمن نقاط الأساس (Chowdhury et al., 2021 ; السيد، 2012).

ولأهمية التكامل العددي في العديد من مجالات العلوم التطبيقية والهندسية تم تناوله في عدة أعمال نذكر منها:

قام الطائي (2010) بدراســة مقارنة بين طرق (شــبه المنحرف وســمبســون والنقطة الوســطى ورمبرج) أجرى مقارنته بحل ثلاثة تكاملات وقد وجد أن طريقة رومبرج هي الأفضل وبعدها طريقة سمبسون.

قدمت علوة وعبد الحق (2017) بحث بعنوان التكامل باستخدام الطرق العددية تم فيه دراسة طرق نيوتن كوتس ورومبرج وجاوس وتبين لهم من نتائج حل تكامل لدالة أســية ومن التمثيل البياني أن طريقة رومبرج أفضل من شبه المنحرف وأن سمبسون 3/8 أفضل من سمبسون والتي هي أيضاً أفضل من شبه المنحرف.

درست خضر (2018) كيفية استخدام طرق (شبه المنحرف وسمبسون وسمبسون 3/8) في حساب الحلول العددية للتكاملات المفردة وقامت بحل نفس تكامل الدالة الأسية لــ علوة وعبد الحق (2017) ووجدت أن طريقة سـمبسـون أفضـل من الطرق الأخرى. وقد قارنا نتائجهم العددية ولاحظت أنه للتقسـيمات الأولى كانت سـمسـون 3/8 أفضـل وبزيادة عدد التقسـيمات سـمبسـون أعطت نتائج أفضل.

كما قدمت Winnicka (2019) ورقة قارنت فيها بين طرق (النقطة الوسـطى وشـبه المنحرف وسـمبسـون) وأجرت المقارنة على عدد من التكاملات توصـلت إلى أن سـمبسـون أفضـل طريقة. ولكن برجوعنا إلى جدول المقارنة فإن طريقتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى على الدالة المثلثية أفضل من سمبسون.

وقامت لوكه وأبو بكر (2020) بدراسة تأثير الشكل البياني لبعض الدوال الرياضية على نتائج ثلاثة طرق (شــبه المنحرف وســمبســون ورمبرج) بحل أربعة تكاملات متنوعة ووجدت أن طريقة شــبه المنحرف هي الأفضل لتكامل الدوال المثلثية.

في كل الدرسات السابقة أعلاه أكدوا أن بزيادة عدد تقسيمات الفترة تزيد دقة النتائج وتقترب إلى القيم الدقيقة وتقل الأخطاء ولكن هذا لا ينطبق على الدوال المثلثية عند رجوعنا لدراسة Winnicka (2019).

نقارن في هذه الورقة بين قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون (والتي تنتمي إلى صيغ نيوتن كوتس المغلقة) وطريقة رومبرج (والمشتقة من قاعدة شبه المنحرف) بحل عدد من التكاملات المتنوعة وسنركز على النتائج وبعض العوامل التي تؤثر على دقة نتائج الطرق.

2. بعض المفاهيم الأساسية

1.2. الأخطاء

تعريف 1: **الخطأ** هو الفرق بين القيمة الدقيقة والقيمة التقريبية. وترجع الأخطاء في النتائج لعدة أسباب منها: خطأ في المعطيات، خطأ التقريب بالطرق العددية، خطأ القطع، أخطاء الحاسب الآلي، والخطأ البشري.

ويمكن حساب الأخطاء عادةً بثلاثة طرق: **الخطأ المطلق** وهو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الدقيقة والتقريبية لعدد. **الخطأ النسبي** هو النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة الدقيقة للعدد. و**الخطأ المئوي** وهو الخطأ النسبي مضروباً في مئة (علوه و عبدالحق، 2017).

2.2. الاستكمال بكثيرة حدود لاجرانج

تعريف 2: الاستكمال هو إيجاد دالة تقريبية تنطبق مع دالة (معطى صيغتها الرياضية أو معرفة في شكل جدول) عند نقاط معينة. ومن أكثر الدوال استخداماً للتقريب كثيرات الحدود لأنها دوال جبرية يسهل التعامل معها بالإضافة إلى إمكانية الحصول على الدقة المطلوبة كما تبينها نظرية وايرستراس للتقريب.

إذا كانت $(x_i, f(x_i)) : i = 0,1, \dots, n$ مجموعة $n+1$ من النقاط المختلفة. إن صيغة لاجرانج العامة للاستكمال لإيجاد كثيرة حدود من درجة أقل من أو تساوي n تعطى بالشكل التالي:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i) \quad : \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{1}$$

وتسمى $l_i(x)$ كثيرات حدود لاجرانج من الدرجة n،ويمكن تقدير الخطأ بكثيرة حدود لاجرانج من الصيغة

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{2}$$

بشـرط أن جميع مشـتقات f حتى المشـتقة $n+1$ موجودة ومتصـلة على فترة $[a,b]$تحوي النقاط المختلفةx_i وξ عدد في (a,b) (صبح والحربي، 2006).

3. بعض من الطرق العددية المستخدمة في حساب التكامل

1.3. طريقة شبه المنحرف

تعتبر هذه الطريقة من أبسط طرق نيوتن- كوتس المغلقة للتكامل العددي وتعتمد على استخدام كثيرة حدود استكمالية من الدرجة الأولى كدالة تقريب. ولاشـتقاق هذه القاعدة نفرض أن $p_1(x)$ هي كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة الأولى تمر بالنقطتين $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1))$على منحنى الدالة المستمرة $f(x)$. باستخدام صيغة لاجرانج نستطيع كتابة الدالة $f(x)$ كالتالي:

$$f(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\varepsilon(x))$$

وإذا عرفنا $h=x_1-x_0$ ليدل على طول الفترة وبتكامل الطرفين على الفترة $[x_0,x_1]$،

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\varepsilon(x))dx$$

بفرض أن f'' مستمرة على الفترة $[x_0,x_1]$، وبما أن المقدار $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير اشـارته (دائماً سالب) على الفترة (x_0,x_1) فإن نظرية القيمة الوسطى للتكامل يمكن تطبيقها لحد خطأ القطع. وبعد اجراء عدد من الحسابات نتحصل على القاعدة التالية:

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi) \qquad (3)$$

الحد الأول في الطرف الأيمن المعادلة (3) يعطي قاعدة شـبه المنحرف ويعطي الحد الثاني خطأ القطع المصاحب لها.

والآن إذا عرفنا $h=\frac{x_1-x_0}{n}$ أي إذا قسـمنا فترة التكامل $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية المتسـاوية الطول، طول كل منها h وإذا استخدمنا الرموز للدلالة على نهاية الفترات الجزئية:

$$x_0=a\ ,x_n=b\ ,\ x_i=x_0+ih\ ,i=0,1,2,\dots,n$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)\,dx$$

وبتطبيق قاعدة شبه المنحرف (3) لكل واحدٍ من هذه التكاملات مع بتطبيق نظرية القيمة القصوى ثم نظرية القيمة المتوسطة لحد خطأ القطع نتحصل على قاعدة شبه المنحرف في الصورة المركبة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\} - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu) \qquad (4)$$

(فايرس وبوردن، 2001؛ السيد، 2012؛ Epperson, 2013).

2.3. طريقة سمبسون

قاعدة سمبسون من قواعد نيوتن - كوتس المغلقة وفيها يتم استبدال الدالة بدالة استكمال من الدرجة الثانية. ولاشتقاق هذه القاعدة نفرض أن $p_2(x)$ كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة الثانية تمر بثلاثة نقط على منحنى الدالة $f(x)$ ولتكن هذه النقط هي $(x_0.f(x_0))$ و $(x_1.f(x_1))$ و $(x_2.f(x_2))$ولذلك يمكن كتابة الدالة $f(x)$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(\varepsilon(x))$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + f(x_2)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(\varepsilon(x))\,dx$$

بما أن المسافة بين أي نقطتين متتاليتين متساوية ونفرض أنها تساوي h، إذاً $h = x_2 - x_1$. $x_1 - x_0 = \frac{x_2 - x_0}{2}$ ونفرض أن $u = x - x_0 - h$ وبإجراء التكامل بالتعويض (مع الأخذ في الاعتبار تكامل حد الخطأ يعطى بـ $\int_{x_0}^{x_2} R_2(x)\,dx = \frac{-h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$ بشرط أن $f^{(iv)}$ موجودة ومستمرة على الفترة $[x_0, x_2]$) نتحصل على القاعدة التالية: قاعدة سمبسون

$$\int_a^b f(x)\;dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \qquad (5)$$

لإيجاد قاعدة سمبسون في الصورة المركبة نقسم الفترة $[a, b]$ إلى عدد زوجي n من الفترات الجزئية المتساوية الطول طول كل منها h أي أن $h = \frac{b-a}{n}$ ونشير لنهاية الفترات الجزئية بالرموز $x_i = x_0 + ih; (i = 0,1, \dots)$ ، $x_0 = a, x_n = b$. وبإجراء التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

وتطبيق قاعدة سمسون (5) لكل تكامل مع تطبيق نظريتي القيمة القصوى والقيمة المتوسطة لحد خطأ القطع وبإجراء الحسابات نتحصل على القاعدة التالية: قاعدة سمبسون المركبة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right] - \frac{(b-a)h^4}{180}\ f^{(iv)}(\mu) \qquad (6)$$

(جاكس وجد، 1992؛ فتيرس وبوردن، 2001؛ Epperson, 2013).

3.3. طريقة رومبرج

يمكن اعتبار طريقة رومبرج على أنها تحسين لمعدل تقارب طريقة شبه المنحرف. إذ تطبق قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $1,2,4,8,\dots,2^k$ من الفترات الجزئية للحصول على تقدير أولي لقيمة التكامل ونرمز لها بـ $T_{k,0}$ وهي تمثل العمود الأول في جدول رومبرج وبعد حسابها تُأخذ منها تجميعات خطية. وتعتد طريقة رومبرج في حصولها على هذه التجميعات على النظرية التالية:

نظرية 1: بفرض أن جميع مشتقات f موجودة ومتصلة على الفترة $[a,b]$, يمكن التعبير عن قاعدة شبه المنحرف في الصورة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h^{2j} \qquad (7)$$

حيث: $x_i = x_0 + ih (i = 1,2,\dots,n-1)$، $a = x_0, b = x_n$ ، $h = \frac{b-a}{n}$ و α_j لا تعتمد على h .

نرمز للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ بـ I وباستخدام النظرية السابقة يمكن كتابته بالشكل:

$$\mathrm{I} = T_{k,0} + \alpha_1 h_k^2 + \alpha_2 h_k^4 + \alpha_3 h_k^6 + \cdots \qquad (8)$$

إذا نصفنا قيمة h وضاعفنا عدد الفترات الجزئية فإن (8) تصبح:

$$\mathrm{I} = T_{k+1,0} + \alpha_1 (\frac{h_k}{2})^2 + \alpha_2 (\frac{h_k}{2})^4 + \alpha_3 (\frac{h_k}{2})^6 + \cdots \qquad (9)$$

ويمكن حذف الحدود المشتملة على h_k^2 من المعادلتين (8)،(9) لنحصل بذلك على:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{3}\left(4T_{k+1,0} - T_{k,0}\right) - \frac{1}{4}\alpha_2 h_k^4 - \frac{5}{16}\alpha_3 h_k^6 - \cdots \qquad (10)$$

ويسمى المقدار $\frac{1}{3}\left(4T_{k+1,0} - T_{k,0}\right)$ استكمال رومبرج الخارجي الأول ويرمز له بالرمز $T_{k+1,1}$. والآن بتكرار العملية: نكتب المعادلة (10) في الصورة:

$$\mathrm{I} = T_{k,1} + \beta_1 h_k^4 + \beta_2 h_k^6 + \cdots \qquad (11)$$

بتنصيف h مرة أخرى ومضاعفة الفترات الجزئية:

$$\mathrm{I} = T_{k+1,1} + \beta_1 \left(\frac{h_k}{2}\right)^4 + \beta_2 \left(\frac{h_k}{2}\right)^6 + \cdots \qquad (12)$$

ويمكن حذف الحدود المشتملة على h_k^4 من المعادلتين (11)،(12) لنحصل بذلك على:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{15}\left(16T_{k+1,1} - T_{k,1}\right) - \frac{1}{20}\beta_2 h_k^6 - \cdots \qquad (13)$$

ويسمى المقدار $\frac{1}{15}(16T_{k+1,1} - T_{k,1})$ استكمال رومبرج الخارجي الثاني ويرمز له بالرمز $T_{k+1,2}$. وبتكرار العملية عدد من المرات نحصل على:

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{T_{k+1,j+1}} + \mathbf{O}\left(\boldsymbol{h^{2j+4}}\right) \; : \; \boldsymbol{T_{k+1,j+1}} = \frac{(\boldsymbol{4^{j+1}T_{k+1,j} - T_{k,j}})}{(\boldsymbol{4^{j+1}-1})} \qquad (14)$$

وترتب استكمالات رومبرج الخارجية في جدول يسمى بجدول رومبرج:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{T_{0,0}} & & & \\ \boldsymbol{T_{1,0}} & \boldsymbol{T_{1,1}} & & \\ \boldsymbol{T_{2,0}} & \boldsymbol{T_{2,1}} & \boldsymbol{T_{2,2}} & \\ \boldsymbol{T_{3,0}} & \boldsymbol{T_{3,1}} & \boldsymbol{T_{3,2}} & \boldsymbol{T_{3,3}} \ \ldots \\ \vdots & & & \end{array}$$

لوحظ أن أغلب المجهود الحسابي لطريقة رومبرج يستنفد في حساب التقديرات الأولى بقاعدة شبه المنحرف وخاصة إذا كانت الدالة معقدة التركيب. ويمكن حساب $T_{k,0}$ من قيمة معلومة $T_{k-1,0}$ من الصيغة:

$$\boldsymbol{T_{k,0}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{T_{k-1,0}} + \frac{\boldsymbol{h_{k-1}}}{\boldsymbol{2}} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{2^{k-1}}} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x_0} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{2i-1})\boldsymbol{h_{k-1}}\right) \qquad (15)$$

تمكننا هذه الصيغة من حساب $T_{k,0}$ باستخدام 2^{k-1} من حسابات قيم الدالة بينما نحتاج إلى $2^k + 1$ من الحسابات إذا حسبنا $T_{k,0}$ مباشرة من قاعدة شبه المنحرف (جاكس وجد، 1992).

4. النتائج والمناقشة

مثال 1: هنا سنقوم بالمقارنة بين طرق التكامل العددي (والمدروسة في هذا البحث) في حساب القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^2 \ln(x)\ dx$.

جدول 1. مقارنة بين الحل التحليلي والحل العددي في حساب قيمة التكامل $\int_1^2 \ln(x)\ dx$

n	مقدار الخطأ			الحل العددي		
	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف
2	0.000459759	0.000459759	0.010275012	0.385834602	0.385834602	0.376019349
4	0.000006467	0.000034798	0.002594852	0.386287894	0.386259563	0.383699509
8	0.000000052	0.000002318	0.000650451	0.386294309	0.386292044	0.385643910
القيمة الدقيقة للتكامل (0.386294361)						

من النتائج في الجدول (1) نلاحظ أن:

- بزيادة عدد تقسيمات الفترة تزداد دقة النتائج في الطرق الثلاثة.

- طريقة سـمبسـون أسـرع في الاقتراب إلى القيمة الدقيقة من طريقة شـبه المنحرف, فعندما $n = 8$ مثلاً نلاحظ بأن القيمة بطريقة سـمبسـون صـحيحة لخمسـة مراتب عشـرية بينما بطريقة شبه المنحرف صحيحة لمرتبتين عشريتين فقط .
- طريقة سمبسون عندما $n = 2$ أدق من طريقة شبه المنحرف عندما $n = 8$.
- أعطت طريقة رومبرج قيم أدق من طريقة سمبسون عندما $n = 4$ و $n = 8$.

مثال 2: سـندرس في هذا المثال تأثير إشـارة حدود التكامل (من حيث كونها موجبة أو سـالبة أو حد موجب وحد سالب) على دقة نتائج الطرق المدروسة (عندما يكون طول فترة التكامل ثابت, ومنحنى الدالـة يقع فوق المحور x). لنأخـذ الدالـة هي $f(x) = e^{-x}$ وفترات التكامل $[1,3]$،$[-1,1]$ ، $[-3,-1]$. وفي الجداول التالية نتائج حساب قيم تكامل هذه الدالة على هذه الفترات (مع ملاحظة أننا قسمنا الفترات إلى أربعة تقسيمات).

جدول 2. تأثير إشارة حدود التكامل على النتائج المحسوبة بطريقة شبه المنحرف في تقريب تكامل الدالة e^{-x}

النتائج / فترة التكامل	الحل التحليلي	الحل العددي بطريقة شبه المنحرف	مقدار الخطأ
$[1,3]$	0.318092373	0.324691848	**0.006599476**
$[-1,1]$	2.350402387	2.399166282	**0.048763895**
$[-3,-1]$	17.36725509	17.72757426	**0.360319170**

جدول 3. تأثير إشارة حدود التكامل على النتائج المحسوبة بطريقة سمبسون في تقريب تكامل الدالة e^{-x}

النتائج / فترة التكامل	الحل التحليلي	الحل العددي بطريقة سمبسون	مقدار الخطأ
$[1,3]$	0.318092373	0.318199619	**0.000107246**
$[-1,1]$	2.350402387	2.351194832	**0.000792445**
$[-3,-1]$	17.36725509	17.37311051	**55420 0.0058**

جدول 4. تأثير إشارة حدود التكامل على النتائج المحسوبة بطريقة رومبرج في تقريب تكامل الدالة e^{-x}

النتائج / فترة التكامل	الحل التحليلي	الحل العددي بطريقة رومبرج	مقدار الخطأ
$[1,3]$	0.318092373	0.318101646	**0.000009273**
$[-1,1]$	2.350402387	2.350470904	**0.000068517**
$[-3,-1]$	17.367255090	17.367761370	**0.000506280**

نلاحظ من الجداول أعلاه:

- أن أدق نتائج تحصلنا عليها عندما كانت إشارة حدود التكامل موجبة أي عندما كانت فترة التكامل [1,3]، تليها في الدقة الفترة [1,1−] (وهي التي يكون فيها حد موجب وحد سالب)، وعندما كانت حدود التكامل سالبة تحصلنا على نتائج أقل دقة من نتائج الفترات الأخرى.
- ويمكن تقريب الطرق حســب دقة النتائج وقربها من القيمة الدقيقة للتكاملات في هذا المثال كالتالي: طريقة رومبرج – طريقة سمبسون – طريقة شبه المنحرف.

مثال 3: سندرس الأن نتائج تقريب مجموعة من التكاملات متنوعة الشكل الرياضي. والجدول التالي يوضح هذه التكاملات ونتائج حلها بالطرق التحليلية والعددية والخطأ المطلق الناتج عن التقريب ونوع الدالة (أخدينا في الاعتبار عند المقارنة نتائج التكاملين في المثالين السابقين واللذان هما لدالة لوغاريتمية ودالة أسية). مع ملاحظة أن تم تقسيم الفترات إلى ثمانية تقسيمات لفترة التكامل الثاني وباقي الفترات إلى أربعة.

جدول 5. يبين تأثير شكل الدالة على نتائج طرق التكامل العددي

نوع الدالة	الخطأ المطلق	قيمة التكامل بالطريقة العددية	الطريقة العددية	التكامل
دالة كسرية	0.009164063	0.472811671	شبه المنحرف	$\int_1^3 \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}dx$
	0.000101286	0.463748895	سمبسون	
	0.000093232	0.463554377	رومبرج	0.463647609
دالة قيمة مطلقة	0.103046768	7.031250000	شبه المنحرف	$\int_0^3 \lvert 3-x^2\rvert \,\mathrm{dx}$
	0.009296768	6.937500000	سمبسون	
	0.007568311	6.920634921	رومبرج	6.928203232
دالة مثلثيه (دالة دورية)	0.000000000	3.141592654	شبه المنحرف	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3\mathrm{x})\mathrm{dx}$
	1.047197550	4.188790204	سمبسون	
	1.326450231	4.468042885	رومبرج	3.141592654
دالة متعددة التعريف	0.000000000	8.750000000	شبه المنحرف	$\int_{-1}^{3} (\begin{cases} 3-x, x \le 2 \\ \frac{x}{2}, x > 2 \end{cases}) dx$
	0.250000000	8.500000000	سمبسون	
	0.283333333	8.466666667	رومبرج	8.750000000

نلاحظ من الجدول (5) أن:

- يمكن ترتيب الطرق حسب مقدار دقة النتائج في التكاملات الأول والثاني (والتي يكون فيها نوع الدالة على الترتيب دالة كسرية ودالة قيمة مطلقة) كالتالي: طريقة رومبرج - طريقة سمبسون - طريقة شبه المنحرف وهذا يتوافق مع المثالين السابقين.

- بالنسبة للتكاملين الثالث والرابع واللذان يكونان لدالة مثلثية ودالة متعددة تعريف على التوالي؛ يمكن ترتيب الطرق حسب دقة النتائج وقربها من القيمة الحقيقية كالتالي: طريقة شبه المنحرف – طريقة سمبسون – طريقة رومبرج.
- التكامل الثاني هو لدالة قيمة مطلقة (وهي كما نعلم دالة متعددة التعريف) وقد كانت طريقتي سمبسون ورومبرج أدق من طريقة شبه المنحرف، ولكن بالنظر إلى فترة التكامل نجدها تشمل تعريف واحد للدالة، وسنبين الآن في الجدول (6) ما إذا كان تغيير فترة التكامل لكي يطبق التكامل على تعريفين للدالة سيغير من النتيجة أم لا. (وقد قسمنا الفترة إلى أربعة تقسيمات).

جدول 6. نتائج حل التكامل $\int_1^4 |3 - x^2| \, dx$ بالطرق العددية

التكامل	الطريقة العددية	قيمة التكامل بالطريقة العددية	الخطأ المطلق
$\int_1^4 \|3 - x^2\| \, dx$	شبه المنحرف	13.78125000	**0.18638010**
	سمبسون	13.00000000	**0.59486990**
13.59486990	رومبرج	12.93333333	**0.66153657**

نلاحظ أن لنتيجة تغيرت وحصلنا على نتيجة مماثلة للتي حصلنا عليها من التكامل الرابع في الجدول (5).

بينا في المثالين الأول والثاني أن زيادة عدد تقسيمات الفترة يزيد من دقة النتائج لكل الطرق العددية المدروسة (وتعتبر هذه النتيجة من نتائج الدراسات السابقة) فهل ينطبق هذا على تكاملات الدوال المثلثية والدوال متعددة التعريف؟. والجدولين التاليين يبينين تأثير زيادة عدد تقسيمات الفترة على الدوال المثلثية والدوال متعددة التعريف.

جدول 7. تأثير زيادة عدد تقسيمات الفترة على دقة نتائج حساب قيمة التكامل $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x) dx$ بالطرق العددية

n	مقدار الخطأ			الحل العددي		
	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف
2	3.141592654	3.141592654	3.141592654	0.000000000	0.000000000	0.000000000
4	1.326450231	1.047197550	0.000000000	4.468042885	4.188790204	3.141592654
8	0.091976082	0.000000000	0.000000000	3.049616572	3.141592654	3.141592654
القيمة التحليلية للتكامل (3.141592654)						

جدول 8. تأثير زيادة عدد تقسيمات الفترة على دقة نتائج حساب قيمة التكامل $\int_{-1}^{3}(\begin{cases}3-x, x\leq 2\\ \frac{x}{2}, x>2\end{cases})dx$ بالطرق العددية

n	مقدار الخطأ			الحل العددي		
	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف	رومبرج	سمبسون	شبه المنحرف
2	0.250000000	0.250000000	0.750000000	9.000000000	9.000000000	9.500000000
4	0.283333333	0.250000000	0.000000000	8.466666667	8.500000000	8.750000000
6		0.027777778	0.083333333		8.777777778	8.833333333
8	0.021428571	0.000000000	0.000000000	8.771428571	8.750000000	8.750000000

القيمة التحليلية للتكامل هي (8.750000000)

نلاحظ من الجدلين أعلاه أن:

- ليس دائما زيادة عدد تقسيمات الفترة يزيد من دقة النتائج للدوال المثلثية والدوال متعددة التعريف، فقد لا يؤدي زيادة عدد تقسيمات الفترة إلى تغير في النتائج أو قد تكون النتائج التي نحصل عليها من زيادة عدد تقسيمات الفترة أقل دقة من النتائج التي نحصل عليها من التقسيمات الأقل منها في العدد.
- الطرق مضطربة قليلاً عند المقارنة في بينها من حيث دقة النتائج فعندما $n = 2$ (في الدالة متعددة التعريف) طريقتي سمبسون ورمبرج أدق من طريقة شبه المنحرف ولكن في أغلب التقسيمات كما لاحظنا شبه المنحرف أفضل.

مثال 4: إذا كان المطلوب هو حساب قيمة التكامل $\int_{-1}^{2} 2e^{-x^2}\, dx$ وهو من التكاملات التي لا نستطيع ايجاد القيمة التحليلية له. سوف نحاول الوصول إلى تقريب لقيمة هذا التكامل باستخدام الطرق العددية، والنتائج موضحة في الجدول (9).

جدول 9. حساب التكامل $\int_{-1}^{2} 2e^{-x^2}\, dx$ بالطرق العددية

عدد تقسيمات الفترة	الحل العددي		
	رومبرج	شبه المنحرف	سمبسون
2	3.501398212	2.915694969	3.501398212
4	3.254517157	3.181384160	3.269947223
8	3.257193649	3.238809695	3.257951542
16	3.257825228	3.253068160	3.257820983
32	3.257810979	3.256625800	3.257811679
64	3.257811047	3.257514764	3.257811086
128	3.257811047	3.257736978	3.257811047
256	3.257811044	3.257792529	3.257811047

التكامل أعلاه قيمته التحليلية غير معروفة، وهنا تكمن فائدة طرق التكامل العددي في إيجاد قيمة تقريبية لهذا النوع من التكاملات من خلال ملاحظة تكرار القيمة. إذ يتضح من الجدول (9) بأن القيمة صحيحة إلى أربعة مراتب عشرية عندما $n = 256$ ،$n = 128$بقاعدة شبه المنحرف، أما عند استخدام طريقة سمبسون فإن القيمة صحيحة إلى ثمانية مراتب عشرية عندما $n = 128$,$n = 256$, وعند استخدام طريقة رومبرج فإن القيمة صحيحة إلى تسعة مراتب عشرية عندما $n = 256$,$n = 64$,128 . ونستنتج من ذلك بأن قيمة التكامل هي (3.257811047) مقربة لتسعة مراتب عشرية.

مثال 5: بفرض أنه أطلق صاروخ من الأرض وسجلت عجلته a عند الزمن t (مقاساً من لحظة الإطلاق) خلال السبعين الثانية الأولى.

جدول 10. قيم عجلة صاروخ عند قيم مختلفة للزمن

$t(sec)$	0	10	20	30	40	50	60	70
$a(m/sec^2)$	30.0	31.7	33.6	35.7	38.0	40.7	43.7	**47.1**

وأردنا معرفة سرعة الصاروخ v عندما $t = 10$. والمسافة التي قطعها بين الزمنين $t = 10$ و $t = 50$ (السيد, 2012).

سنستخدم قاعدة شبه المنحرف في إيجاد سرعة الصاروخ v عندما $t = 10$. (يوجد في هذه الحالة قيمتين فقط للدالة المكاملة) (السيد, 2012).

بما أن $a = \frac{dv}{dt}$

$$\Longrightarrow \int_0^T a\ dt\ = \int_0^T \frac{dv}{dt}\ dt = v(T) - v(0)$$

$$v(0) = 0\ \Longrightarrow\ v(T) = \int_0^T a\ dt$$

$$v(10) = \int_0^{10} a\ dt\ = \frac{h}{2}[a(0) + a(10)] = \frac{10-0}{2}[30.0 + 31.7] = 308.5\ \ m/sec$$

الآن نحسب المسافة التي قطعها الصاروخ بين الزمنين $t = 10$ و $t = 50$.

أولاً: نستخدم طريقة شبه المنحرف:

$$S = \int_{10}^{50} v\ dt\ = \frac{h}{2}[v(10) + 2\{v(20) + v(30) + v(40)\} + v(50)]$$

$$v(20) = \frac{h}{2}[a(0) + 2a(10) + a(20)] = 635\ m/sec$$

$$v(30) = \frac{h}{2}[a(0) + 2\{a(10) + a(20)\} + a(30)] = 981.5\ m/sec$$

$$v(40) = \frac{h}{2}[a(0) + 2\{a(10) + a(20) + a(30)\} + a(40)] \ = 1350\ m/sec$$

$$v(50) = \frac{h}{2}[a(0) + 2\{a(10) + a(20) + a(30) + a(40)\} + a(50)] = 1743.5\ m/sec$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(\frac{50-10}{4}\right)[308.5 + 2\{635 + 981.5 + 1350\} + 1743.5] = 39.925\ km$$

ثانياً: نستخدم طريقة سمبسون

$$S = \frac{h}{3}[v(10) + 4\{v(20) + v(40)\} + 2v(30) + v(50)]$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{50-10}{4}\right)[308.5 + 4\{635 + 1350\} + 2(981.5) + 1743.5] = 39.850\ km$$

5. الاستنتاجات

نستنج من مراجعة الدراسات السابقة ونتائج جداول هذا البحث أن:

- في حالة كانت الدالة أسية أو لوغاريتمية أو كسرية: طريقة رومبرج هي أفضل الطرق من حيث دقة النتائج وسرعة التقارب إلى القيمة الدقيقة وتأتي طريقة سمبسون في المرتبة الثانية. وكلما زاد عدد تقسيمات الفترة كلما كانت النتائج أدق في كل الطرق.
- في حالة كانت الدالة مثلثية (دورية) أو دالة متعددة التعريف: طريقة شبه المنحرف تكون أسرع في التقارب وبعدها طريقة سمبسون. ولا يؤدي دائماً زيادة عدد تقسيمات الفترة إلى زيادة دقة نتائج طرق التكامل العددي.
- إذا كان منحنى الدالة في الربع الأول فإن الطرق المدروسة تعطي نتائج دقيقة جداً مقارنةً بما إذا كان منحنى الدالة يقع في الربعين الأول والثاني معاً أو في الربع الثاني والذي تحصلنا فيه على أقل دقة للطرق.

5. المقترحات

بعد الانتهاء من هذا البحث ولا يزال الكثير مما يمكن دراسته من حيث المقارنة بين طرق التكامل العددي، لذا فإنني أقترح بدراسة التفسير الهندسي لاستنتاجات هذا البحث أو دراسة تأثير الشكل البياني للدوال. كما أقترح أيضاً بدراسة تأثير وقوع منحنى الدالة أسفل المحور x أي عندما تعطي الدالة قيم سالبة على دقة نتائج الطرق. من النتائج التي تم الوصول إليها وبدراسات مستقبلية من المحتمل الوصول إلى إثبات رياضي للطريقة الأفضل.

المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

السيد، أبو بكر أحمد (2012). *الطرق العددية والتحليل العددي* (ط.1). مكتبة الفلاح.

الطائي، كمال حميد (2010). دراســة مقارنة لطرق التكامل العددي المحدود باســتخدام برنامج MATLAB. *مجلة كلية التراث الجامعة*, (07),86-122..

جاكس، إيان؛ وجد، كولن. (1992). *التحليل العددي*. ترجمة: علي ابر اهيم و محمد النجار). منشورات جامعة الفاتح.

خضر، سليمة محمد (2018). استخدام بعض الطرق في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة. *المجلة العلمية لكلية التربية جامعة مصراتة*، 2(11)،511-527.

صبح، محمد منصور؛ الحربي، صالح بن منيع (2006). *التحليل العددي وطرق حسابه العددية*. مكتبة الرشد

علوه، حنان عبد الرحمن؛ عبدالحق، منى حامد (2017). *التكامل باســتخدام الطرق العددية*. مشــروع تخرج جامعة سبها.

فايرس، دوغلاس؛ بوردن، ريتشارد (2001). *التحليل العددي*. ترجمة: رمضان جهيمة و كمال أبودية). ELGA

لوكة، هناء المنير أحمد؛ أبو بكر، منى الســنوســي محمد (2020). تأثير الشــكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي المحدود للدوال الرياضية. *مجلة العلوم التطبيقية*، 3(5), 118-138.

ثانيا: المراجع باللغة الإنجليزية

Chowdhury, T.A., Islam, T., Mujahid, A.A., & Ahmed, M.B. (2021). The Periodicity of the Accuracy of Numerical Integration Methods for the Solution of Different Engineering Problems. *Journal of Engineering Advancements*, 02(04), 203- 216.

Epperson, J. F. (2013). *An Introduction to Numerical Methods and Analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Winnicka, A. (2019). Comparison of numerical integration methods. In *SYSTEM* (pp. 1-4).