

المؤتمر العلمي الثاني

لطلاب المرحلة الجامعية والدراسات العليا
الجامعة الأسمرية الإسلامية 1446هـ - 2024م



بعض تطبيقات التكامل الثنائي

نادية محمد الدريوي، محمد سالم بن منصور*، و حمزة سلامة هويدي

قسم الرياضيات، كلية التربية، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

*البريد الإلكتروني: mh.mansur@asmarya.edu.ly

Some Applications of Double Integration

Nadia Mohamed Aldriwi, Mohamed Salem Ben Mansour*, and Hamza Salama Hawidi

Department of Mathematics, Faculty of Education, Alasmarya Islamic University, Zliten, Libya.

الملخص

يعد التكامل من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، حيث تتجاوز تطبيقاته الجوانب النظرية لتصل إلى مجالات متعددة مثل الفيزياء، الهندسة، الاقتصاد، وعلم الأرصاء الجوية، ونظرا لكون التكامل العادي أو الخطي يفشل في حال الدوال المعرفة في متغيرين، وفي حالة إيجاد المساحات والمركز المتوسط وعزم القصور الذاتي لبعض المناطق غير المنتظمة والتي تكون عليها الدالة المتصلة غير قابلة للتكامل، كان لا بد من وجود التكاملات الثنائية والتي تلعب دورا رئيسيا لحل مثل هذه المشكلات. تهدف هذه الورقة إلى إبراز أهمية التكامل الثنائي وذلك من خلال استعراض مجموعة من التطبيقات الأساسية التي تسلط الضوء على بعض استخداماته في مجالات الفيزياء والهندسة وتقديم أمثلة توضيحية؛ وذلك للإجابة عن سؤال البحث وهو: ما هي أهم تطبيقات التكامل الثنائي؟ يبدأ البحث بتقديم للتكامل وأنواعه ومن ثم تعريف بالتكامل الثنائي واستعراض لأهم تطبيقاته؛ حيث تم تقديم أمثلة لحساب الحجم مما يعزز الفهم الهندسي للفضاء، كما تناول البحث حساب المساحات والتي تلعب دورا كبيرا في الهندسة المعمارية والتصميم، وتم التطرق لحساب الكتلة ما يتيح دراسة توزيع الكتلة في الأجسام المعقدة وفهم الجوانب الديناميكية المتعلقة بها، وتم استعراض كيفية تحديد مركز الكتلة للأجسام حيث يُبرز هذا التطبيق أهمية التكامل الثنائي في تحليل الاستقرار والتوازن في الأنظمة الفيزيائية، كما تم التعرف على كيفية حساب عزم القصور الذاتي ما يُعد ضروريًا لدراسة الحركة الدورانية والتفاعلات الديناميكية للأجسام. وتوصلت الورقة إلى أن التكامل الثنائي يمكن أن يستخدم كأسلوب فعال لحل الكثير من المشكلات المتعلقة بالتطبيقات قيد الدراسة.

الكلمات الدالة: الإحداثيات القطبية، التكامل، التكامل الثنائي، تطبيقات.

Abstract

Integration is a fundamental concept in mathematics, with applications that extend beyond theoretical aspects into various fields such as physics, engineering, economics, and meteorology. Given that ordinary or linear integration fails



for functions defined in two variables, especially in finding areas, centroids, and moments of inertia for irregular regions where the continuous function may be non-integrable, the necessity for double integration arises, which play a crucial role in addressing such issues. This paper aims to highlight the importance of double integration by reviewing a set of fundamental applications that illuminate some of its uses in the fields of physics and engineering, along with providing illustrative examples, to answer the research question: What are the key applications of double integration? The study begins with an introduction to integration and its types, followed by a definition of double integration and an overview of its most important applications. Examples of volume calculations are presented to enhance geometric understanding of space. The paper also discusses area calculations, which are vital in architectural design, and examines mass calculations that facilitate the study of mass distribution in complex bodies and their dynamic aspects. Additionally, the paper explores how to determine the center of mass for objects, emphasizing the importance of double integration in analyzing stability and equilibrium in physical systems. Finally, the study addresses the calculation of the moment of inertia, which is essential for understanding rotational motion and the dynamic interactions of bodies. The paper concludes that double integration can be used as an effective method for solving many problems related to the applications being studied.

Keywords: Applications, Double integration, Integration, Polar coordinates.

1. المقدمة

تلعب الرياضيات دورا بارزا في شتى مجالات الحياة في عصرنا الحاضر. فلا تكاد تجد علما إلا وقد ارتكز بشكل كبير على الرياضيات. ويُعد التكامل من أكثر فروع الرياضيات شيوعا واستخداما في الحياة التطبيقية لا سيما التكامل الثنائي؛ حيث يُعد التكامل الثنائي من الأدوات الرياضية الأساسية التي تُستخدم في مجالات متعددة من العلوم والهندسة. يمكن هذا النوع من التكامل الباحثين والممارسين من تحليل كميات متعددة الأبعاد، مما يساهم في فهم أعمق للظواهر الطبيعية والهندسية. تكتسب التطبيقات العملية للتكامل الثنائي أهمية خاصة في مجالات مختلفة مثل الفيزياء والهندسة، حيث تُستخدم في حساب الحجم والمساحات، وتُعتبر ضرورية لتحديد الخصائص الهندسية للأجسام (الكيسي، 2004).

ومن منطلق أن ربط العملية التعليمية بالواقع والحياة العملية يزيد من دافعية المتعلمين للتعلم (سلامة، 2021)؛ جاءت فكرة هذا البحث الذي يهدف إلى تحفيز مستخدمي الرياضيات لزيادة الاهتمام بهذا العلم وفهمه بالتعرف على أهم تطبيقاته في الحياة العملية وذلك من خلال الإجابة عن سؤال البحث الرئيسي وهو: ما هي أهم تطبيقات التكامل الثنائي؟ ولتحقيق أقصى استفادة، تم اتباع المنهج الوصفي التحليلي باعتباره الأنسب لتحقيق أهداف هذا البحث، كما تم الاستعانة بالتطبيقات الإلكترونية Desmos و geogebra لرسم الأشكال البيانية بأوضح صورة ممكنة؛ وذلك لمواجهة



التحديات المتمثلة في صعوبة تخيل بعض المناطق المراد حساب التكامل الثنائي لها ما يزيد من قدرة القارئ على فهم أعمق للمسائل.

تتناول هذه الورقة البحثية مجموعة من التطبيقات المهمة للتكامل الثنائي، بدءاً من حساب الحجوم للأجسام الصلبة، مروراً بتحديد المساحات تحت المنحنيات، وصولاً إلى دراسة توزيع الكتلة ومركز الكتلة للأجسام. كما يتم تناول عزم القصور الذاتي وهو مفهوم حيوي في دراسة الحركة الدورانية. ومن خلال استعراض هذه التطبيقات، نهدف إلى تعزيز الفهم الرياضي والفيزيائي لهذا المفهوم وإلى إظهار فعالية التكامل الثنائي كأداة تحليلية، وفتح آفاق جديدة للبحث والتطوير في هذا المجال.

2. الجانب النظري

يُطلقُ كثيرٌ من علماء الرياضيات على التكامل اسم أصل المشتقة، ذلك لأن عملية إيجادها هي في الواقع عكس عملية إيجاد المشتقة؛ فإذا كانت f دالة، فإننا نبحث عن دالة أخرى F تحقق $F'(x) = f(x)$ لكل x ينتمي إلى نطاق مناسب، وتوضح العلاقة بينهما نظرية تسمى النظرية الأساسية لحساب التكامل.

ويوجد نوعان من التكامل هما: التكامل غير المحدد والتكامل المحدد وسمي التكامل غير المحدد بذلك لأنه لا يعبر عن دالة محددة بل يعبر عن مجموعة من الدوال (جبهة وهب الريح، 2001).

1.1. التكامل غير المحدد

لتكن $[a, b]$ فترة غير خالية من المجموعة \mathbb{R} ، ولتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة، نقول بأن الدالة $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة f أو تكامل f إذا وفقط إذا كانت F قابلة للإشتقاق على الفترة (a, b) وكان $F' = f$ ، ويُرمز لذلك بالرمز $\int f(x) dx = F(x) + c$ وتُقرأ التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة للمتغير x هو $F(x) + c$ حيث أن الرمز \int هو علامة التكامل، c هو ثابت التكامل وعندما توجد مثل هذه الدالة فإننا نقول بأن الدالة f قابلة للتكامل والتكامل هنا هو تكامل غير محدد (البرقلي، 2009).

2.2. التكامل المحدد

لنفرض أن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات، والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ يُرمز لها بالرمز A_a^b .

لنفرض أن P هو تجزيء منتظم للفترة $[a, b]$:

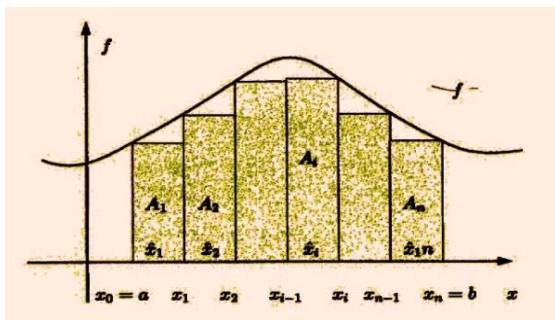
$$P: a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

إذا المساحة هي تقريبا مساحة المستطيلات الموضحة بالشكل (1) وهي:

$$A_a^b \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

إذا كان $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، \hat{x}_i هي نقطة تقع داخل الفترة $[a, b]$ فإن:

$$A_a^b = f(\hat{x}_1) \Delta x + f(\hat{x}_2) \Delta x + \dots + f(\hat{x}_n) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i) \Delta x$$



شكل 1. تجزئ المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور السينات.

والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

1.2.2. تعريف التكامل المحدد:

إذا كانت f دالة معرفة على $[a, b]$ ، $a < b$ فإن التكامل المحدد على الفترة $[a, b]$ هو:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i) \Delta x_i$$

بشرط وجود النهاية (جهيمة وهب الريح، 2001).

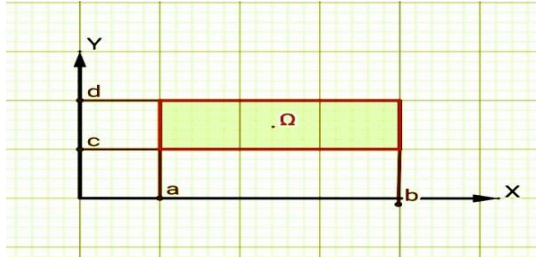
3.2. التكامل الثنائي

بينما يمثل التكامل الأحادي $\int_a^b f(x) dx$ المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق محور x في الفترة $[a, b]$ حيث أن $f(x) \geq 0$ ، يُعتبر التكامل الثنائي تعميما للتكامل الأحادي بحيث يمثل الحجم تحت

سطح في R^3 .

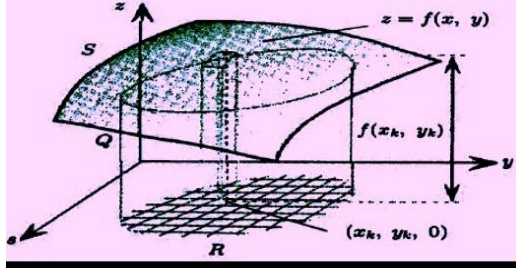
بفرض أن Ω تمثل مستطيلا في R^2 بحيث

$$\Omega = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



شكل 2. يوضح المستطيل Ω في R^2

وبفرض أن $z = f(x, y)$ دالة متصلة وغير سالبة على المنطقة Ω ، أي أن $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in \Omega$. والسؤال الآن ما هو الحجم تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المستطيل Ω ؟ وللإجابة عن هذا السؤال نتبع الخطوات التالية:



شكل 3. يوضح تقسيم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية وتقدير الحجم تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المستطيلات الفرعية

1. نقسم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية بمستقيمات موازية للمحورين بحيث أن:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

ويمكن تعريف Δx و Δy كما يلي:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m}$$

وهكذا يمكن تعريف المستطيلات الفرعية كما يلي:

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

حيث أن $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$ ، أي أنه توجد mn من المستطيلات الفرعية.

2. نقدر الحجم تحت السطح وفوق كل مستطيل فرعي:

إذا كانت (x_i^*, y_j^*) نقطة في Ω_{ij} ، فإن الحجم تحت السطح وفوق المستطيل Ω_{ij} تكون قيمته التقريبية كما يلي:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y = f(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad \dots (1)$$



حيث أن $\Delta A = \Delta x \Delta y$ تمثل مساحة المستطيل Ω_{ij} .

3. بجمع الأحجام التقريبية نحصل على الحجم الكلي كما يلي:

$$V = V_{11} + V_{12} + \dots + V_{1m} + V_{21} + V_{22} + \dots + V_{2m} + \dots + V_{n1} + V_{n2} + V_{nm}$$

أو بصورة مختصرة:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} \quad \dots (2)$$

من المعادلتين (1)، (2) نجد أن:

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij}$$

4. بأخذ النهاية عندما $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ نجد أن: (جھيمه وهب الريح، 2001)

$$V = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

1.3.2. تعريف التكامل الثنائي:

إذا كانت $z = f(x, y)$ والمنطقة R معرفة كما يلي:

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

وكانت $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$ موجودة، فإن التكامل الثنائي للدالة f على R يعرف كما يلي (جھيمه وهب الريح، 2001):

$$\iint_R \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

2.3.2. قواعد التكامل الثنائي:

عند حساب المشتقات الجزئية للدالة ذات المتغيرين فإننا نعامل أحد المتغيرين كثابت ونشتق بالنسبة للمتغير الآخر، وبالمثل فإن عملية التكامل الثنائي تتضمن التكامل بالنسبة لأحد المتغيرين بينما نعامل المتغير الآخر كثابت.

يمكن حساب التكامل الثنائي على المنطقة R باستخدام القواعد التالية:

بفرض أن f دالة في متغيرين x, y ومستمرة على المنطقة R فإن:

1. يمكن إيجاد التكامل الثنائي بحساب أحد التكاملين المتساويين:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{أو} \quad \iint_R f(x, y) dy dx$$

فمثلاً للحصول على $\iint_R f(x, y) dy dx$ نتبع الخطوات التالية:



أ. تكامل التكامل الداخلي وهو $\int f(x,y)dy$ بالنسبة لمتغيره وهو y ونعامل المتغير الآخر وهو x كثابت ونوجد قيمة التكامل بين حدود المتغير الذي نُكامل بالنسبة إليه:

$$y = f_1(x) \quad , \quad y = f_2(x)$$

ب. نُكامل الناتج من (أ) بالنسبة للمتغير الآخر وهو x بين $x = a, x = b$:

$$\iint_R f(x,y)dy dx = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

2. إذا تم تعريف R بواسطة $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ مع استمرارية g_1, g_2 داخل الفترة $[a, b]$ فإن:

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

3. إذا تم تعريف R بواسطة $c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ مع استمرارية h_1, h_2 داخل الفترة $[c, d]$ فإن:

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

ملحوظة: يجب أن يكون التكامل الخارجي أرقاما لأن الناتج يجب أن يكون قيمة عددية. أما التكامل الداخلي ففي أغلب الأحيان يكون دوالا.

4. إيجاد حدود التكامل: لإيجاد حدود التكامل نتبع الخطوات التالية:

أ. الرسم: نرسم منطقة التكامل ونقوم بتسمية المنحنيات المحيطة بها.

ب. إيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيات.

3.3.2. التكامل الثنائي بتغيير الإحداثيات (Double Integration using Change of Variables):

تعرفنا على التكامل الثنائي باستخدام الإحداثيات الديكارتية، ولكن أحيانا يكون من المناسب إيجاد التكامل الثنائي بتغيير الإحداثيات.

1.3.3.2. نظرية: إذا كانت الدالة f متصلة في R_{xy} ، وكانت الدالتان $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$

معرفتين ولهما مشتقات متصلة في R_{uv} ، و $u = u(x, y), v = v(x, y)$ معرفتين ومتصلتين في R_{xy}

حيث أن $f(u(x, y), v(x, y))$ متصلة في R_{uv} ، فإن:

$$\left[\iint_{R_{xy}} f(x,y)dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)). |J| du dv \right], |J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

وحيث أن الإحداثيات القطبية يمكن التعبير بـ $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$ فإنه يمكن التعبير عن التكامل الثنائي باستخدام الإحداثيات القطبية كما يلي :

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{r\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

لاحظ أن الجاكوبي (J) في هذه الحالة هو:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

إذا كانت $R_{r\theta} = \{(r, \theta) ; r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ فإن:

$$\iint_{r\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

إذا كانت $R_{r\theta} = \{(r, \theta); \theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r), a \leq r \leq b\}$ فإن:

$$\iint_{r\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \int_{r=a}^b \int_{\theta=\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

ويمكن تحديد الحدود في المستوى $r\theta$ - كما يلي:

نثبت قيم θ بحيث تكون θ_1 أصغر زاوية يكون شعاعها منطلق من نقطة الأصل ومماس لحدود المنطقة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، بينما أكبر زاوية يكون شعاعها منطلق من نقطة الأصل ومماس لحدود المنطقة هي θ_2 ، ومن بين الشعاعين اللذين يكونان θ_1, θ_2 نأخذ شعاعاً آخر ونبحث عن أول r يدخل بهما شعاع المنطقة وآخر r يخرج بهما من المنطقة، ولتكن $r_1(\theta), r_2(\theta)$ على الترتيب وبذلك نكون قد حصلنا على الحدود القطبية للتكامل (جهيمة وهب الريح، 2001).

4.2. مفاهيم أساسية

1.4.2. الحجم (Volume):

إذا كانت تمثل معادلة السطح، فإن $V = \iint_R f(x, y) dA$

تعطي حجم الجسم الواقع بين السطح والمستوى xy . (جهيمة وهب الريح، 2001)

2.4.2. المساحة بين المنحنيات (Area Between Curves):

كحالة خاصة من الحجم نجد أنه إذا كانت $f(x, y) = 1$ فإن $A(R) = \iint_R dA$ حيث $A(R)$ تمثل

مساحة المنطقة المغلقة R (جهيمة وهب الريح، 2001).



3.4.2. الكتلة (Mass):

إذا كانت $\rho(x, y)$ تمثل الكثافة $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ فإن $M(R) = \iint_R \rho(x, y) dA$ حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة المحددة بالمنطقة R (جبهة وهب الريح، 2001).

4.4.2. مركز الكتلة (Center of Mass):

النقطة التي يكون عندها العزم الأول يساوي صفرا لمادة في المنطقة R يسمى مركز الكتلة، أي أن مركز الكتلة هو نقطة موازية للكتلة في R .

فإذا كانت $\rho(x, y)$ تمثل الكثافة فإن مركز الكتلة (\bar{x}, \bar{y}) للصفيحة المثلثة بالمنطقة R يعطى:

$$M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA, M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA$$
$$\rightarrow \bar{x} = \frac{M_x}{M}, \bar{y} = \frac{M_y}{M}$$

وفق ما ذكره كلا من الكيسي، (2004) وجبهة وهب الريح (2001).

5.4.2. عزم القصور الذاتي (Moment Of Inertia):

عزم القصور الذاتي (العزم الثاني) للصفيحة حول محور x (I_x) ومحور y (I_y) حيث (M_x, M_y) العزم الأول لمحور السينات والصادات و $f(x, y)$ تمثل الكثافة (كتلة/مساحة)، (الكيسي، 2004: جبهة وهب الريح، 2001):

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dA, I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي حول نقطة الأصل ويُطلق عليه عزم القصور الذاتي القطبي:

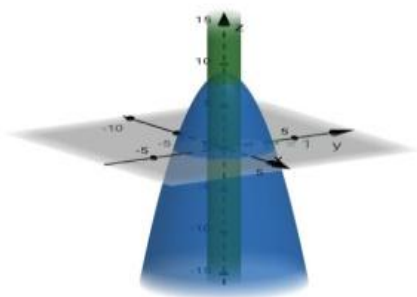
$$I_0 = I_y + I_x = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y) dA$$

3. الجانب التطبيقي

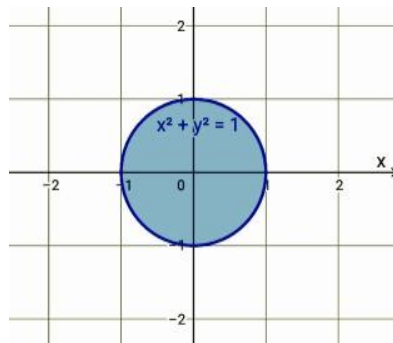
وفي هذا البند يتم تقديم بعض الأمثلة التوضيحية لتطبيقات التكامل الثنائي.

مثال 1: أوجد حجم المنطقة المحصورة من الأعلى بالقطع المكافئ $z = 9 - x^2 - y^2$ ومن الأسفل بدائرة الوحدة في المستوى xy (Hass et al., 2018).

الحل: منطقة التكامل R تحدها دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ ، الموصوفة بالإحداثيات القطبية بواسطة $r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، تظهر المنطقة المغلقة في الشكل (4ب).



شكل 4ب. يوضح المنطقة المحصورة من الأعلى
بالقطع المكافئ $z = 9 - x^2 - y^2$ ومن الأسفل
بدائرة الوحدة في المستوى xy



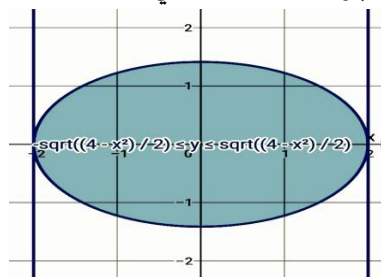
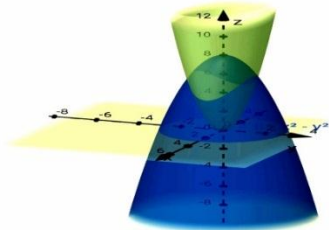
شكل 14. يوضح دائرة الوحدة

يتم إيجاد الحجم باستخدام التكامل الثنائي كما يلي:

$$V = \iint_R (9 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9 - r^2) r dr d\theta = \frac{17\pi}{4}$$

مثال 2: أوجد الحجم المحدد بالسطحين $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + 3y^2$ (Hass et al., 2018).

الحل: تظهر المنطقة المغلقة في الشكل (5ب).



شكل 5ب. يوضح المنطقة المحددة بالسطحين

$$z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + 3y^2$$

شكل 15أ. يوضح $-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}$

من تقاطع السطحين نجد أن: $-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}$

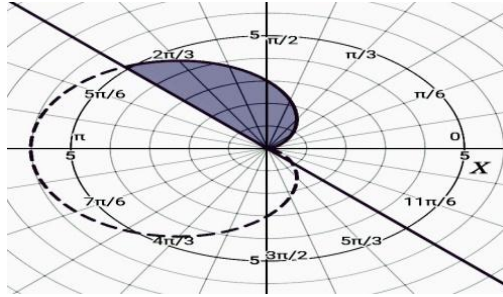
$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}}^{\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dy dx = 8\pi\sqrt{2}$$

مثال 3: أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y = -x$ والمنحنى $x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x$

(Hass et al., 2018).

الحل: نستخدم الإحداثيات القطبية لوصف المنطقة R ، $r^2 = 3r - 3r \cos(\theta)$ أو $r = 3(1 - \cos(\theta))$ وهي تمثل معادلة قلب، والمعادلة القطبية للمستقيم $y = -x$ هي:

$$r \sin(\theta) = -r \cos(\theta) \rightarrow \tan(\theta) = -1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$



شكل 6. يوضح مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y = -x$ والمنحنى $x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x$

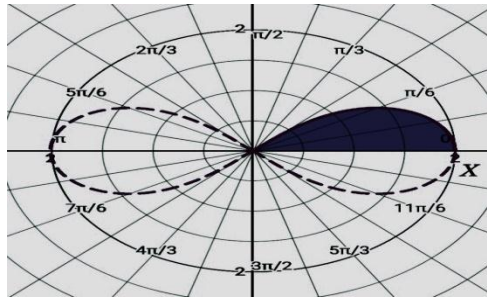
من الرسم نلاحظ أن المنطقة محددة بـ:

$$0 \leq r \leq 3(1 - \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore I = \iint_R dx dy = \int_{\theta=0}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\int_{r=0}^{3(1-\cos \theta)} r dr \right] d\theta = 8.4153516$$

مثال 4: أوجد كتلة المنطقة المحددة بالشكل $r^2 = 4\cos(2\theta)$ حيث $\rho(x, y) = 1$ (Hass et al., 2018)

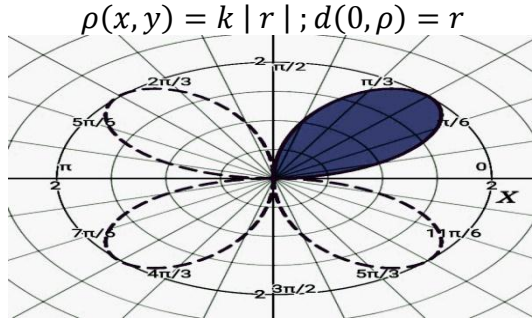
الحل: نرسم الشكل أولاً:



شكل 7. يوضح المنطقة المحددة بالشكل $r^2 = 4\cos(2\theta)$ حيث $\rho(x, y) = 1$

$$M = \iint_R dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{r=0}^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r dr \right] d\theta = 4$$

مثال 5: أوجد مركز الكتلة لصفحة معدنية كثافتها عند نقطة تتناسب طرديا مع المسافة من القطب وتعطي المنطقة المحددة بورقة واحدة من منحنى الوردية في الربع الأول (Zill & Wright, 2011).
الحل: نرسم المنطقة أولا ونعبر عن دالة الكثافة كما جاء في منطوق السؤال بالشكل (8):



شكل 8. يوضح المنطقة المحددة بورقة واحدة من منحنى الوردية في الربع الأول

$$M = \iint_R k |r| dA = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin 2\theta} (r) r dr d\theta = \frac{16}{9} k$$

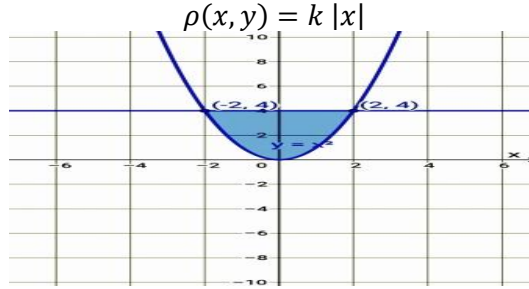
$$M_x = \iint_R r^3 \cos \theta dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin 2\theta} r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{512}{315} k$$

$$M_y = \iint_R r^3 \sin \theta dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin 2\theta} r^3 \cos \theta dr d\theta = \frac{512}{315} k$$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{512}{315} k}{\frac{16}{9} k} = \frac{32}{35}, \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{512}{315} k}{\frac{16}{9} k} = \frac{32}{35}$$

مثال 6: صفحة معدنية رقيقة كثافتها تتناسب مع البعد عن محور الصادات وتعطي المنطقة المحددة بالمستقيم $y = 4$ والقطع المكافئ $y = x^2$ أوجد عزم القصور الذاتي للصفحة حول المستقيم $y = 4$ (الكيسي، 2004).

الحل: نرسم المنطقة أولا ونعبر عن دالة الكثافة كما جاء في منطوق السؤال بالشكل (9):



شكل 9. المنطقة المحددة بالمستقيم $y = 4$ والقطع المكافئ $y = x^2$

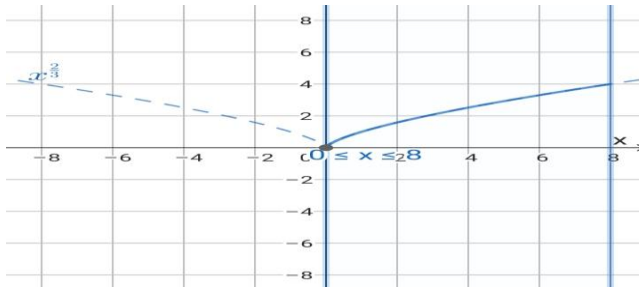
حيث k يمثل ثابت التناسب، وقد استعملنا القيمة المطلقة للبعد لأن المسافة مقدار موجب دائما، فيكون عزم القصور الذاتي المطلوب:

$$I = \iint_R (4 - y)^2 \rho(x, y) dA = 2k \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4 - y)^2 dy dx$$

$\therefore R$ متماثلة حول محور الصادات والدالة $|x|$ زوجية فإن :

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4 - y)^2 x dy dx = \frac{64}{3} k$$

مثال 7: صفيحة رقيقة مركز كثافتها مُعطى بـ $f(x, y) = xy$ المحددة بـ x والمستقيم $x = 8$ والمنحنى $y = x^{\frac{2}{3}}$ ، جد مركز كتلتها (\bar{x}, \bar{y}) وعزم القصور الذاتي القطبي لها (الكبيسي، 2004).
الحل: حيث أن مركز الكتلة لمادة في منطقة ما هو النقطة التي عندها العزم الأول يساوي صفرا، وبذلك يكون مركز الكتلة هو نقطة موازية للكتلة في هذه المنطقة؛ ولإيجاد الحل نرسم الشكل أولا.



شكل 10. المنطقة المحددة بالمستقيم $x = 8$ والمنحنى $y = x^{\frac{2}{3}}$

$$M = \iint_R xy dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} (xy) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^8 x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{768}{5}$$



$$M_x = \iint_R xy^2 dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_0^8 x^3 dx = \frac{1024}{3}$$

$$M_y = \iint_R yx^2 dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} yx^2 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^8 x^{\frac{10}{3}} dx = \frac{12288}{13}$$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{80}{13}, \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{20}{9}$$

$$I_x = \iint_R xy^3 dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy^3 dy dx = \frac{1}{4} \int_0^8 x^{\frac{11}{3}} dx = \frac{6144}{7}$$

$$I_y = \iint_R yx^3 dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} yx^3 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^8 x^{\frac{13}{3}} dx = 6144$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{6144}{7} + 6144 = 49152/7$$

4. الاستنتاجات

أظهرت هذه الورقة فعالية التكامل الثنائي في معالجة بعض المشكلات الهندسية والفيزيائية التي تعجز الطرق التقليدية عن حلها، وذلك من خلال تقديم أمثلة تطبيقية لحساب الحجوم والمساحات، بالإضافة إلى تحديد توزيع الكتلة، ومركز الكتلة وعزم القصور الذاتي. كما أظهرت النتائج أن استخدام التكامل الثنائي يُسهم في تعزيز الفهم الرياضي والنظري، مما يفتح آفاقاً جديدة للبحث والتطوير في هذا المجال.

يمكن أن تكون نتائج هذا البحث أساساً لابتكارات وتطبيقات مستقبلية في شتى المجالات العلمية والهندسية. ففي مجال الهندسة، تُتيح النتائج تحسين كفاءة تصميم الأشكال والهياكل، ما يؤدي إلى تحسين الكفاءة والموثوقية. كما تُسهم هذه النتائج في تطوير تقنيات متقدمة في مجالات مثل الروبوتات، حيث يُعدّ الفهم الدقيق للمساحات والأحجام شرطاً أساسياً لتحسين قدرات التنقل والتفاعل مع البيئة. وبالتالي، يُظهر هذا البحث أن التكامل الثنائي ليس مجرد أداة رياضية، بل أداة قوية ذات تطبيقات عملية واسعة النطاق.

يُوصى بمواصلة دراسة وتطوير المناهج التعليمية لتعزيز التطبيقات العملية للتكامل الثنائي، مما يسهم في تحفيز الأجيال القادمة على استكشاف الرياضيات كأداة أساسية لتحليل وفهم العالم من حولهم. في ضوء ذلك، فإن البحث المستمر في هذا المجال يُعد ضرورياً لتوسيع نطاق استخدام التكامل الثنائي وتطوير أساليب جديدة يمكن أن تؤدي إلى نتائج مبتكرة في مختلف التخصصات العلمية.



المراجع

أولاً: قائمة المراجع باللغة العربية

البرقلي، نادية اسماعيل (2010). *أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتها*. منشورات جامعة 7 أكتوبر، مصراتة.

الكبيسي، مها عواد (2004). *الرياضيات المتقدمة*. منشورات جامعة عمر المختار، البيضاء.
جهيمة، محمد رمضان؛ وهب الريح، أحمد عبدالعالي (2016). *التفاضل والتكامل*. الطبعة الرابعة. دار الكتاب الجديد المتحدة، بيروت.

سلامة، عبدالله. (2021). *توظيف التفكير في العملية التعليمية*. دار الكتب العلمية، بيروت.

ثانياً: قائمة المراجع باللغة الإنجليزية

Hass, J. R., Heil, C. D., & Weir, M. D. (2018). *Thomas' Calculus*. Pearson.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). *Calculus: Early Transcendental*. Jones and Bartlett Publishers.