



الأسس النظرية للتكامل الثنائي

سناء نوري المبسوط و فتحية ميلاد العقاب*

قسم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

*البريد الإلكتروني: f.aloqab@asmarya.edu.ly

The Theoretical Basis of Double Integration

Sana N. Almabsout and Fathia M. Alogab*

Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasmarya Islamic University, Zliten, Libya.

المخلص

تنقسم المعرفة الرياضية إلى المعرفة المفاهيمية النظرية والمعرفة الإجرائية التطبيقية، وبشكل التوازن بينهما شرطاً أساسياً لتكوين معرفة رياضية عميقة، ويُعد التكامل الثنائي أحد المفاهيم المحورية في الرياضيات المتقدمة، إلا أن الدراسات كثيراً ما تركز على الجانب الإجرائي والتطبيقي مهملة الجانب النظري. تهدف هذه الورقة لعرض الأسس النظرية للتكامل الثنائي، بوصفه امتداداً للتكامل المحدود في بعد واحد، استخدم المنهج الوصفي التحليلي لدراسة المفاهيم والعلاقات الرياضية، يتناول البحث تعريف التكامل الثنائي عبر مجموع ريمان الثنائي و شروط وجوده، وتبسيط حساب التكامل وفقاً لنظرية فوبيني وتغيير الإحداثيات، بداية بدراستها على مناطق مستطيلة ثم التعميم على مناطق عامة في المستوى عبر تمديد الدالة المكاملة، يظهر البحث أن المعرفة الإجرائية للتكامل الثنائي لا يمكن أن تكتمل دون إدراك الأسس النظرية التي تمكن الباحث من تمثيل الظواهر الطبيعية بدقة وترجمتها إلى نماذج رياضية، مما يعزز أهمية التوازن بين الجانب النظري والتطبيقي. الكلمات الدالة: التكامل الثنائي، نظرية فوبيني، مجموع ريمان، التكاملات التكرارية.

Abstract

Mathematical knowledge is divided into theoretical conceptual knowledge and procedural applied knowledge, and the balance between the two forms a fundamental condition for developing deep mathematical understanding. Double integration is considered one of the central concepts in advanced mathematics. However, studies often focus on the procedural and applied aspects while neglecting the theoretical aspect. This paper aims to present the theoretical foundations of double integration as an extension of single-variable definite integration. The descriptive-analytical method was used to study mathematical concepts and relationships. The research addresses the definition of double integration through the double Riemann sum and its existence conditions and simplifies



its calculation according to Fubini's theorem and coordinate transformation, starting with its study over rectangular regions and then generalizing to general regions in the plane via the extension of the integrable function. The research shows that procedural knowledge of double integration cannot be complete without understanding the theoretical foundations that enable the researcher to accurately represent natural phenomena and translate them into mathematical models, thereby highlighting the importance of balancing the theoretical and applied aspects.

Keywords: Double integration, Fubini's theorem, Riemann sums, Repeated integrals.

1. المقدمة

تصنف المعرفة الرياضية لنوعين متكاملين: المعرفة المفاهيمية والتي تمثل شبكة مترابطة من العلاقات والمبادئ الأساسية، والمعرفة الإجرائية التي تتعلق بالخطوات والعمليات اللازمة لحل المسائل، العلاقة بين النوعين تفاعلية متبادلة، فالمعرفة المفاهيمية تمنح الإجراءات الرياضية معناها وتبررها، في حين أن الإجراءات تدعم المفاهيم من خلال التطبيق، من ثم، يمثل التوازن بين النوعين شرطاً أساسياً لتكوين معرفة رياضية عميقة ذات توظيف فعال (Hiebert, 1986).

التكامل الثنائي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات المتقدمة، إذ يمثل امتداداً طبيعياً لمفهوم التكامل المحدود في بعد واحد، وقد نشأ استجابةً للحاجة إلى وصف الكميات في بعدين، مثل الكثافة والمساحة والأحجام تحت الأسطح، يُعد التكامل الثنائي بذلك أداة رياضية ذات أهمية كبيرة لها العديد من التطبيقات العلمية في مجالات العلوم والهندسة، وعليه فإن الإلمام بأساسياته يفتح آفاقاً واسعة لتطبيقه في دراسة الظواهر العلمية المختلفة (Thuan & Ioan, 2024).

وفي هذا الإطار، هدفت دراسة (Khemane et al. (2022 لتحليل فهم طلاب الهندسة للمفاهيم الأساسية للتكامل الثنائي وتطبيقه في مقرراتهم، وقد أظهرت النتائج مواجهة الطلاب لصعوبات في تمثيل منطقة التكامل وتبديل ترتيب التكاملات، والتي تعكس قصوراً في الربط بين الجانب النظري والتطبيقي، كما درست (Özbeý & Dost (2023 الصورة الذهنية لمعلمي الرياضيات المستقبليين للمفهوم الهندسي للتكامل الثنائي، أظهرت النتائج أن معظم التصورات اعتمدت على الفهم الحدسي دون الربط بين التعريف الرياضي وصورته الذهنية، مما يؤثر على جودة التعليم.

انطلاقاً من ذلك، تأتي أهمية دراسة الموضوع من منظور نظري يوضح البناء المفاهيمي للتكامل الثنائي، وعليه تهدف الورقة إلى دراسة الأسس النظرية للتكامل الثنائي بوصفه امتداداً للتكامل المحدود في بعد واحد، والنظريات التي تنظمه وتبرز أهميته، حيث اعتمدت الورقة على المنهج الوصفي التحليلي في دراسة المفاهيم والعلاقات الرياضية، يتناول البحث في منته تعريف التكامل الثنائي وشرط وجوده، والعلاقة بين التكامل الثنائي والتكاملات المتكررة وفق نظرية فوبيني، بداية

بدراسة أبسط نوع من المناطق وهو المستطيل، ثم التعميم لمناطق عامة، ودعم الجانب النظري برسومات توضيحية أعدت ببرنامجي MATLAB و DRAWNOTE.

2. بعض المفاهيم الأساسية

1.2. دالة القيمة الحقيقية في متغيرين

إذا كانت $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، فإن الدالة الحقيقية في متغيرين f هي قاعدة أو علاقة تُعين لكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية $(x, y) \in D$ عدداً حقيقياً وحيداً يرمز له بالرمز $f(x, y)$. تُسمى المجموعة D مجال الدالة f ، وتتكون من جميع الأزواج المرتبة (x, y) التي تُعرف عندها الدالة، أما مدى الدالة فهو مجموعة القيم التي تأخذها f عند جميع النقاط بالمجال (Stewart, 2008).

2.2. المشتقة العكسية

إذا كانت $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ، فإن الدالة F تسمى المشتقة العكسية للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، إذا كان $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (Thomas Jr et al., 2014).

3.2. التكامل الغير محدود

إذا كانت f دالة حقيقية، فإن مجموعة جميع المشتقات العكسية للدالة f تُسمى التكامل الغير محدود للدالة f ، ويرمز إليها بـ: $\int f(x).dx$. حيث يطلق على الرمز $\int$ رمز التكامل، وتسمى f الدالة المكاملة، ويُعد x متغير التكامل (Thomas Jr et al., 2014).

4.2. التكامل المحدود

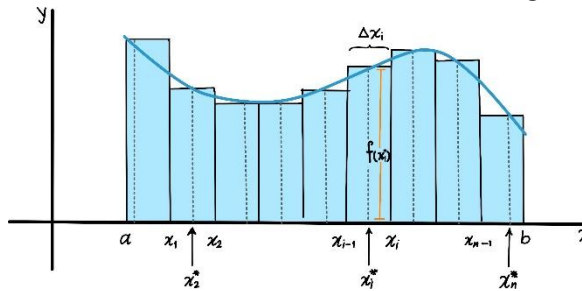
إذا كانت $f \geq 0$ وقابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، فإن المساحة بين المنحنى f والفترة $[a, b]$ هي التكامل المحدود لـ f من a إلى b ، وتكتب (Stewart, 2008): $\int_a^b f(x).dx$

3. التكامل الثنائي باستخدام المجموع التقريبي لريمان

يُعد التكامل المحدود في بعد واحد $\int_a^b f(x).dx$ الأساس الذي تبنى عليه التكاملات المتعددة في الأبعاد الأعلى، تستند فكرته إلى تعريف مجموع ريمان حيث تُقرب المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ عن طريق تقسيم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، واختيار نقطة x_i^* بكل فترة جزئية، نتحصل على مساحة تقريبية (الشكل 1) وفقاً للمجموع التالي:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x_i ; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ويسمى هذا المجموع بمجموع ريمان.



شكل 1. تقسيم المساحة تحت المنحنى $f(x)$ إلى n من المستطيلات الجزئية

يُعرف التكامل بأنه النهاية لهذا المجموع عندما تؤول أطوال الفترات الجزئية إلى الصفر ($n \rightarrow \infty$).

أي أن:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x_i \quad (1) \dots$$

بطريقة مماثلة، إذا كانت $f(x, y) \geq 0$ دالة معرفة على منطقة مغلقة R في المستوى xy ،

فإنه يمكن إيجاد حجم الجسم ثلاثي الأبعاد الواقع فوق المنطقة R وتحت السطح f ، بفرض أن

منطقة التكامل هي مستطيل مغلق، معرف على النحو التالي:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

وباختيار نقطة داخل كل مستطيل جزئي R_{ij} ، $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ ، وبحساب مجموع ثنائي نتحصل على

حجم تقريبي للمنطقة المرادة.

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A \quad (2) \dots$$

حيث أن كل حد $\Delta A \cdot f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ يمثل حجم عمود قائم ارتفاعه $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ ومساحة

قاعدته $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ ، وكلما اقتربت أبعاد المستطيلات الجزئية من الصفر، فإن التقريب للمعادلة

(2) يصبح أكثر دقة، نتحصل على الحجم المطلوب المتمثل بالمعادلة:

$$V = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A_{ij} \quad (3) \dots$$

ملاحظة: إذا كانت $f(x, y) \leq 0$ على المنطقة المستطيلة R أو في بعض أجزائها، فإن التكامل الثنائي

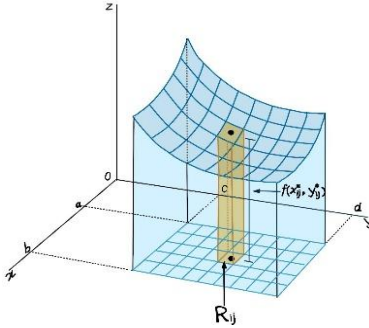
يعبر عن حجم ذو إشارة سالبة تُطرح من القيم الموجبة للتكامل.

1.3. تعريف التكامل الثنائي

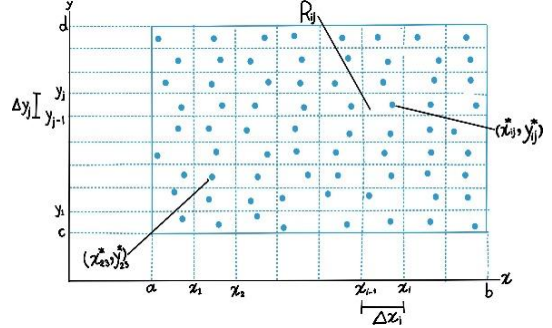
إذا كانت f دالة حقيقية محدودة ومعرفة على المستطيل R ، فإن التكامل الثنائي للدالة f على R يعرف بالشكل التالي:

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A_{ij} \quad (4)$$

إذا كانت النهاية موجودة (Stewart, 2008).



شكل 3. عمود قائم على R_{ij} ارتفاعه $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$



شكل 2. المستطيل R مقسم إلى $m \times n$ من المستطيلات الجزئية

2.3. شرط وجود التكامل

ليكون التكامل الثنائي معرّفاً، يجب أن يتحقق شرط وجود النهاية السابق، أي أنه:

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ ، حيث إذا كان $n, m > N$ ، ولأي نقطة اختيارية $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ تكون عندها النهاية مستقلة، فإن:

$$\left| \iint_R f(x, y) \cdot dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A_{ij} \right| < \varepsilon$$

إذاً، جميع الدوال المتصلة قابلة للتكامل، وبشكل عام إذا كانت f محدودة، أي يوجد $M \in \mathbb{R}$ عدد ثابت، بحيث:

$$|f| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$$

وكانت f متصلة على R باستثناء عدد محدود من نقاط الانقطاع، فإن f تكون قابلة للتكامل على R (Stewart, 2008).

مثال (1): أوجد الحجم تحت السطح $z = x + 2y$ وفوق المستطيل $R = [1, 2] \times [3, 5]$.

الحل: الدالة z هنا كثيرة حدود وهي متصلة، إذا هي قابلة للتكامل على R .

نقسم الفترة $[1, 2]$ إلى m من الفترات الجزئية وتقسم الفترة $[3, 5]$ إلى n من الفترات الجزئية.

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{m} = \frac{1}{m} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

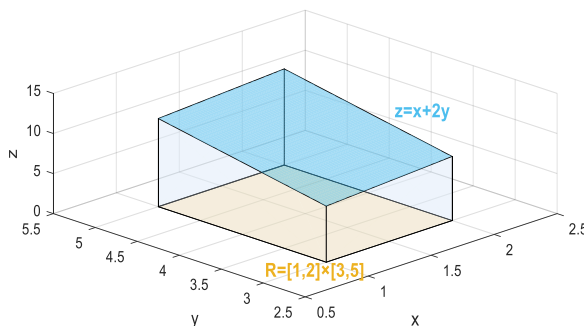
$$\Delta y_j = \frac{d-c}{n} = \frac{5-3}{n} = \frac{2}{n} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

وباختيار (x_{ij}^*, y_{ij}^*) نقاط المنتصف لكل مستطيل جزئي

$$x_{ij}^* = 1 + \frac{1}{m} \left(i - \frac{1}{2} \right), y_{ij}^* = 3 + \frac{2}{n} \left(j - \frac{1}{2} \right)$$

لإيجاد الحجم نستخدم التكامل التالي:

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A$$



شكل 4. الحجم فوق R وتحت السطح z

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{m} \left(i - \frac{1}{2} \right) + 6 + \frac{4}{n} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) \left(\frac{2}{nm} \right) = 19$$

3.3. بعض خصائص التكامل الثنائي

تُستمد خصائص التكامل الثنائي من تعريفه القائم على نهاية المجموع لريمان، والتي تتماثل في جوهرها مع خصائص التكامل المحدود في بعد واحد.

لتكن f, g دوال قابلة للتكامل على المنطقة المستطيلة $R = [a, b] \times [c, d]$ ، وليكن $c \in \mathbb{R}$ ثابت، حيث: $cf, f \mp g$ دوال قابلة للتكامل أيضاً، فإن:

- $\iint_R [f(x, y) \mp g(x, y)] \cdot dA = \iint_R f(x, y) \cdot dA \mp \iint_R g(x, y) \cdot dA$
- $\iint_R cf(x, y) \cdot dA = c \iint_R f(x, y) \cdot dA$
- $f(x, y) = c \Rightarrow \iint_R f(x, y) dA = c A(R)$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R .

4. التكاملات المتكررة ونظرية فوبيني

تُعد التكاملات المتكررة خطوة محورية في تبسط حساب التكامل الثنائي، حيث تتمثل في تنفيذ عمليتين متتاليتين من التكامل الأحادي كل منها بالنسبة إلى أحد المتغيرات.

1.4. التكاملات المتكررة

يعرف التكامل المتكرر للدالة f قابلة للتكامل على المنطقة المستطيلة $R = [a, b] \times [c, d]$ ، على أنه:

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \dots (5)$$

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad \dots (6)$$

$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ تعني أننا نكامل بالنسبة لـ y أولاً مع اعتبار x ثابت، $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ نكامل بالنسبة لـ x أولاً مع اعتبار المتغير y ثابت (Marsden & Tromba, 2012).

2.4. نظرية فوبيني

إذا كانت f قابلة للتكامل على المنطقة المستطيلة $R = [a, b] \times [c, d]$ ، فإن التكامل الثنائي لها على R ، يمكن حسابه كالتالي:

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

تُعد نظرية فوبيني من النتائج الأساسية في التكامل الثنائي، إذ تبين إمكانية حساب التكامل على هيئة تكاملات أحادية متتالية بأي ترتيب للمتغيرات، ويمكن توضيح هذه النظرية هندسياً، بوصف التكامل الثنائي أنه حجم جسم ثلاثي الأبعاد محصور بين السطح الممثل بالدالة f والمنطقة R الشكلان (5 و6).

عند تثبيت قيمة المتغير x ، نحصل على قطاع رأسي للجسم عمودي على محور x ، وتكون مساحة هذا القطاع:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

ومن ثم يحسب الحجم بتكامل مساحة القطاع على امتداد محور x ، حيث:

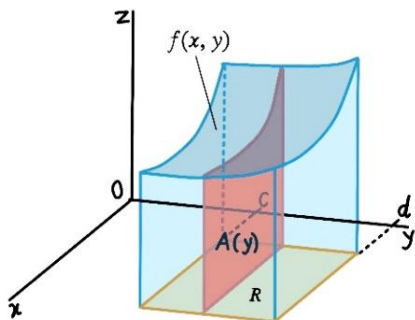
$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \cdot dy \right) dx$$

وبالمثل، يمكن تثبيت y للحصول على مقاطعات عمودية على المحور y ، تكون مساحتها:

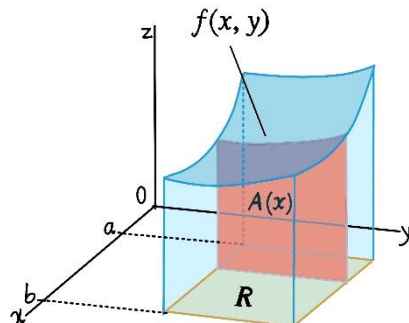
$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

ثم بتكاملها على امتداد محور y ، نتحصل على الحجم التالي: (Stewart, 2008).

$$V = \int_a^b A(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$



شكل 6. قطاع عمودي على محور y



شكل 5. قطاع عمودي على محور x

مثال (2): إذا كانت $R = [0, 3] \times [1, 2]$ ، أوجد: $\iint_R x^2 y \, dA$

الحل: بما أن الدالة كثيرة حدود مستمرة على R ، نطبق نظرية فوبيني.

$$i) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \cdot dy dx = \int_0^3 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{27}{2}$$

$$ii) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx dy = \int_1^2 \left[\frac{yx^3}{3} \right]_0^3 dy = \int_1^2 \frac{27}{3} y \, dy = \frac{27}{2}$$

مثال (3): إذا كانت $R = [1, 2] \times [0, \pi]$ ، أوجد: $\iint_R y \sin(xy) \, dA$

الحل: الدالة $f(x, y) = y \sin(xy)$ ، مستمرة على المنطقة المستطيلة R ، إذا وفقاً لنظرية فوبيني

يمكننا التعبير عن التكامل الثنائي بترتيبين مختلفين.

$$i) \iint_R y \sin(xy) \, dA = \int_1^2 \left(\int_0^\pi y \sin(xy) \, dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{\pi}{x} \cos(\pi x) + \frac{1}{x^2} \sin(\pi x) \right] dx$$

هذا التكامل لا يمكن حله باستخدام القواعد التقليدية لحساب التكامل، لأن كلا الجزأين يُلجأ عند تكاملها عادةً إلى استخدام الدوال الخاصة، أو التكامل العددي، وعند حسابه برمجياً، نجد أن:

$$\int_1^2 \left[-\frac{\pi}{x} \cos(\pi x) + \frac{1}{x^2} \sin(\pi x) \right] dx = 0$$

$$ii) \iint_R y \sin(xy) dA = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \sin(xy) dx \right) dy = \int_0^\pi [-\cos(2y) + \cos(y)] dy = 0$$

5. التكامل الثنائي على مناطق عامة

في الجانب التطبيقي، نادراً ما نتعامل مع مناطق مستطيلة، ولتوسيع نطاق التكامل ليشمل مناطق عامة في المستوى، يكون من الضروري فهم هذه المناطق من الناحية التحليلية، حيث تصنف المناطق بالمستوى إلى نوعين رئيسيين، هما:

(1) مناطق من النوع الأول (رأسية بسيطة): إذا كانت $g_1(x), g_2(x)$ دوال حقيقية مستمرة على الفترة $a \leq x \leq b$ ، فإن $D \subseteq \mathbb{R}^2$ تسمى منطقة رأسية بسيطة، إذا كانت:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

(2) منطقة من النوع الثاني (أفقية بسيطة): إذا كانت $h_1(y), h_2(y)$ دوال حقيقية مستمرة على الفترة $c \leq y \leq d$ ، فإن $D \subseteq \mathbb{R}^2$ تسمى منطقة أفقية بسيطة، إذا كانت: (Stewart, 2008).

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

لحساب الحجم الواقع تحت منحنى الدالة f ، وفوق المنطقة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ باستخدام التكامل الثنائي، نلجأ إلى تمديد الدالة المكاملة على المستطيل $R = [a, b] \times [c, d]$ يحوي المنطقة D ، عبر تعريف دالة جديدة $F^*(x, y)$ على المستطيل R ، كما يلي:

$$F^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \in D \\ 0 & : (x, y) \notin D \end{cases}$$

وبما أن F^* قابلة للتكامل على R نطبق نظرية فوبيني، فنحصل على:

$$\iint_R F(x, y) \cdot dA = \int_a^b \int_c^d F^*(x, y) \cdot dy dx = \int_c^d \int_a^b F^*(x, y) \cdot dx dy$$

إذا كانت D منطقة من النوع الأول، نستخدم الترتيب $dy dx$.

$$\iint_R F^*(x, y) \cdot dA = \int_a^b \int_c^d F^*(x, y) \cdot dy dx = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x, y) \cdot dy dx$$

لأن $F^*(x, y) = 0$ عندما $y > g_2(x)$ و $y < g_1(x)$ ، أي خارج حدود D .
وإذا كانت D منطقة من النوع الثاني، نستخدم الترتيب $dx dy$.

$$\iint_R F^*(x, y) \cdot dA = \int_c^d \int_a^b F^*(x, y) \cdot dx dy = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} f(x, y) \cdot dx dy$$

1.5. نظرية فويني (الصيغة المعممة)

إذا كانت f دالة مستمرة على المنطقة D من النوع الأول، فإن:

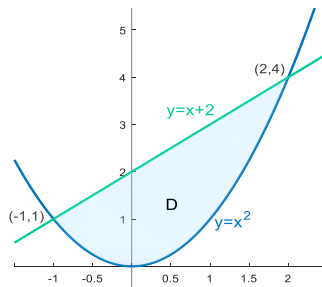
$$\iint_D f(x, y) \cdot dA = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x, y) \cdot dy dx \quad \dots (7)$$

وإذا كانت f دالة مستمرة على المنطقة D من النوع الثاني، فإن (Strang & Herman, 2016)

$$\iint_D f(x, y) \cdot dA = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} f(x, y) \cdot dx dy \quad \dots (8)$$

مثال (4): إذا كانت $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x + 2\}$ ، احسب مساحة المنطقة D .

الحل: نستخدم الخاصية (c)، حيث $f(x, y) = 1$ و D منطقة رأسية بسيطة (الشكل 7).



شكل 7. المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x + 2$

$$\iint_D 1 \cdot dA = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{x+2} 1 \cdot dy dx = \int_{-1}^1 [x + 2 - x^2] dx = \frac{10}{3}$$

مثال (5): أوجد الحجم الواقع أسفل القطع المكافئ $z = x^2 + y^2$ وأعلى المنطقة المحددة بالمستقيم $y = 2x$ والقطع المكافئ $y = x^2$.

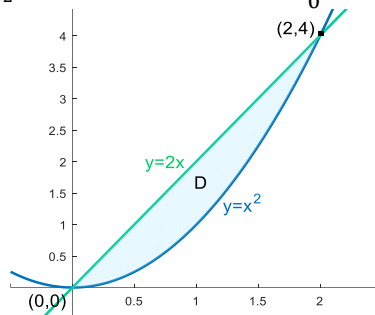
الحل: نحدد حدود منطقة التكامل، بمعرفة نقاط التقاطع للمنحنيين (الشكل 8).

$$2x = x^2 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

إذا نطاق التكامل بالنسبة لـ x من 0 إلى 2، ونقاط تقاطع المنحنيين $(0,0)$ ، $(2,4)$.
حيث المنحنى السفلي $y = x^2$ و المنحنى العلوي $y = 2x$ ، وفقا لذلك ، فإن D منطقة رأسية بسيطة .

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 , x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \cdot dy dx = \int_0^2 \left[\frac{14}{3} x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right] dx = \frac{216}{35}$$



شكل 8. المنطقة الواقعة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$

ملاحظة: توجد مناطق تصنف من النوع الأول والثاني معا وتسمى مناطق بسيطة، بالمثال السابق يمكننا وصف المنطقة كمجموعة أفقية بسيطة، وذلك بجعل حدودها بدلالة المتغير y .

$$x_1 = \sqrt{y} , x_2 = \frac{y}{2}.$$

حيث نطاق التكامل للمتغير y من 0 إلى 4. نلاحظ أن $x_2 \leq x_1$ لكل $y \in [0,4]$ ، وعليه فإن D منطقة محددة بمنحنيين دوال بدلالة المتغير y ، أي أنها منطقة أفقية بسيطة.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 , \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) \cdot dx dy = \frac{216}{35}$$

6. تغيير الإحداثيات

يعد تغيير الإحداثيات تعميما للتكامل بالتعويض في بعد واحد، حيث يُعاد صياغة مسألة التكامل في إطار إحداثي أكثر ملاءمة لطبيعة المنطقة أو الدالة المدروسة، وفقا للنظرية التالية:

نظرية: إذا كانت D منطقة بالمستوى xy و D^* منطقة بالمستوى uv ، وإذا كانت $f(x, y)$ متصلة على D ، والدالتان $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ معرفتين ولها مشتقات أولية متصلة في D^* ،

والدوال العكسية $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ معرفة ومتصلة في D ، حيث
 $f(x(u, v), y(u, v))$ متصلة في D^* ، فإن (جبهة وهب الريح، 2002):

$$\iint_D f(x, y) \cdot dx \, dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot du \, dv \quad \dots (9)$$

المقدار $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ يمثل نسبة التغير في المساحة الناتجة عن تغير الاحداثيات، فعند تمثيل منطقة التكامل ضمن شبكة إحداثية جديدة، قد ينتج عن ذلك تمديدا أو انكماشاً أو تغييراً غير منتظم للمنطقة مما يؤثر على عنصر المساحة $dA = dx \, dy$ ، حيث يصبح:

$$dx \, dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot du \, dv$$

ويرمز له بالرمز $|J|$ (Marsden & Tromba, 2012).

مثال (6): إذا كانت D هي المنطقة المحددة بالمعادلات $xy = 1$, $xy = 3$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$ ،

$$\text{أوجد: } \iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx \, dy$$

الحل: باختيار التحويل $u = xy$ ، $v = \frac{y^2}{x}$

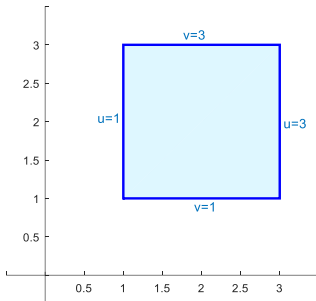
بالتعبير عن x و y بدلالة المتغيرات الجديدة، نجد أن: $x = u^{2/3} v^{-1/3}$ و $y = \sqrt[3]{uv}$.

نوجد حدود المنطقة D^* بالمستوى uv ، بإعادة كتابة معادلات المنطقة D بدلالة المتغيرات الجديدة، حيث تكون كما بالجدول (1):

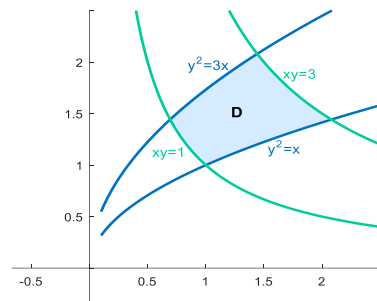
جدول 1. إيجاد حدود المنطقة D^*

$xy\text{-eq for } D$	$uv\text{-eq for } D^*$	
$y^2 = 3x$	$(\sqrt[3]{uv})^2 = 3 \left(u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \right)$	$\Rightarrow v = 3$
$y^2 = x$	$(\sqrt[3]{uv})^2 = \left(u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \right)$	$\Rightarrow v = 1$
$xy = 3$	$(\sqrt[3]{uv}) \left(u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \right) = 3$	$\Rightarrow u = 3$
$xy = 1$	$(\sqrt[3]{uv}) \left(u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \right) = 1$	$\Rightarrow u = 1$

$$\therefore D^* = [1, 3] \times [1, 3]$$



شكل 10. المنطقة $D^* = [1, 3] \times [1, 3]$



شكل 9. المنطقة المحددة بالمعادلات

$$xy = 1, xy = 3, y^2 = x, y^2 = 3x$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}(uv)^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}$$

$$\therefore \iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy = \int_1^3 \int_1^3 \left(\frac{3}{v + vu} \right) \left(\frac{1}{3v} \right) \cdot du dv = \frac{2}{3} \ln 3$$

1.6. التكامل الثنائي في الإحداثيات القطبية

الإحداثيات القطبية هي حالة خاصة من تغيير الإحداثيات في المستوى، حيث يعبر فيها عن النقاط بدلالة بعدها عن نقطة الأصل، والزوايا التي يصنعها الشعاع مع المحور الأفقي باتجاه الموجب، وتعطى معادلات التحويل بالصيغة التالية:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r, \theta) r dr d\theta \quad \dots (9)$$

مثال (7): إذا كانت R هي المنطقة بالمستوى xy المحددة بالمنحنيين $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$,

$$\text{أوجد: } \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx dy$$

الحل: المقدار $x^2 + y^2$ يجعلنا نقترح استعمال الإحداثيات القطبية (r, θ) ، حيث:

$$x = r \cos(\theta) \quad , \quad y = r \sin(\theta) \quad ; r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

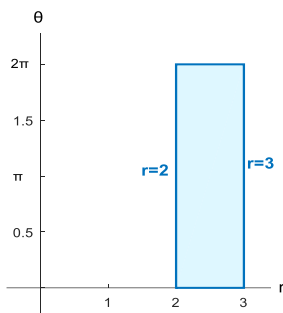
الحل:

يبين الجدول (2) الإحداثيات القطبية

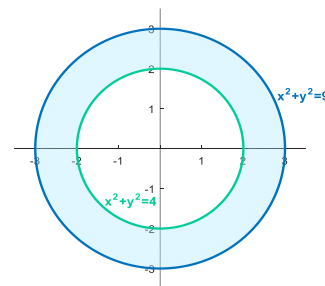
جدول 2. حدود D^* بالإحداثيات القطبية

$xy\text{-eq for } D$	$uv\text{-eq for } D^*$	
$x^2 + y^2 = 4$	$r^2 = 4$	$\Rightarrow r = 2$
$x^2 + y^2 = 9$	$r^2 = 9$	$\Rightarrow r = 3$

إذا $2 \leq r \leq 3$ ومن الرسم نجد أن $0 \leq \theta \leq 2\pi$



شكل 12. المنطقة $D^* = [2, 3] \times [0, 2\pi]$



شكل 11. المنطقة المحددة بالمنحنيين $x^2 + y^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 = 9$

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_2^3 r \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{19}{3} \cdot d\theta = \frac{38}{3} \pi$$

7. الخاتمة

في ختام البحث، تؤكد الدراسة الأهمية المحورية للأسس النظرية في بناء المعرفة الرياضية للتكامل الثنائي، بوصفه امتداداً للتكامل المحدود في بعد واحد، حيث يعبر التكامل الثنائي هندسياً عن حجم المنطقة الواقعة تحت سطح الدالة المكاملة، وكما أوضحت الدراسة أن نظرية فوبيني تسهل من حساب التكامل الثنائي إذ تبين أن تغيير ترتيب متغيري التكامل لا يؤثر في القيمة النهائية، وإن كان هذا التغيير يبسط حساب التكامل أحياناً. كذلك، فإن تحديد نوع منطقة التكامل بالمستوى يساعد على اختيار ترتيب المكاملات المناسب، بينما يتيح تغيير الإحداثيات إعادة تمثيل منطقة التكامل بصورة أكثر انتظاماً. كما أن الجمع بين الجانب النظري والتطبيقي يشكل أساساً لبناء معرفة رياضية قادرة على تمثيل الظواهر الطبيعية بدقة، وعلى إثراء توصي الدراسة بتحسين المقررات الدراسية عبر الربط بين



الجانب النظري للمفاهيم الرياضية والتطبيقات في مختلف المجالات، أيضاً توظيف البرامج التفاعلية مثل *Matlab* و *Geogebra* في العملية التعليمية، وتشجيع إجراء الدراسات والأبحاث التي تهدف إلى تطوير استراتيجيات تعليمية تربط بين المعرفة المفاهيمية والمعرفة الإجرائية.

المراجع

أولاً: المراجع باللغة العربية

جهيمة، رمضان محمد؛ هب الريح، أحمد عبد العالي (2002). *التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)*، ط. 3. دار الكتاب الجديد المتحدة.

ثانياً: المراجع باللغة الإنجليزية

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Routledge.

Khemane, T., Padayachee, P., & Shaw, C. (2022). Students' understanding of double integrals- implications for the engineering curriculum. In: *Towards a new future in engineering education, new scenarios that european alliances of tech universities open up* (pp. 391-401). Universitat Politècnica de Catalunya.

Marsden, J. & Tromba, A. (2012). *Vector Calculus*, 6th ed. Macmillan Learning.

Özbeý, M., & Dost, Ş. (2023). Concept Images of University Students for Geometric Representation of the Double Integral Concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 66-98.

Stewart, J. (2008). *Calculus early Transcendentals*, 6th ed. Cengage Learning

Strang, G. & Herman, E. (2016). *Calculus*, Vol. 3. openstax. Available online at: [<https://openstax.org/details/books/calculus-volume-3>]

Thomas Jr, J. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*, 13th ed. Pearson Education.

Thuan, N. D. & Loan, T. T. (2024). Double integration and its applications in some problems in physics and engineering. *Middle East Research Journal of Engineering and Technology*, 4(3):84-90.