



استخدام معادلة الفرق الخطية المتجانسة كأداة رياضية لتحليل الأنظمة الديناميكية المنفصلة

إسراء فرج دعدوش، سهام فرج الذويبي*، و أسماء فتحي ديهوم

قسم الرياضيات، كلية التربية، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

*البريد الإلكتروني: siham.aldwibi@asmarya.edu.ly

Using Homogeneous Linear Difference Equations as a Mathematical Tool for Building and Analyzing Discrete Dynamical Systems

Esra Faraj Dadoush, Siham Faraj Aldwibi*, and Asma Fathi Dehom

Department of Mathematics, Faculty of Education, Alasmarya Islamic University, Zliten, Libya.

المخلص

في ظل التطور المتسارع في العلوم التطبيقية والرياضية، أصبحت النمذجة الرياضية أداة أساسية لفهم وتحليل الأنظمة المعقدة التي تتغير عبر الزمن، سواء كانت في مجالات البيئة أو الاقتصاد أو علوم الحاسوب. من بين الأساليب الرياضية المهمة في هذا السياق تبرز معادلات الفرق الخطية المتجانسة، التي تلعب دوراً محورياً في وصف وتحليل الأنظمة الديناميكية المنفصلة التي تتطور بخطوات زمنية محددة؛ لما توفره من نماذج دقيقة تربط بين النظرية الرياضية والواقع التطبيقي. تهدف هذه الورقة إلى إبراز دور معادلات الفرق الخطية المتجانسة كأداة رياضية لبناء وتحليل الأنظمة الديناميكية المنفصلة. وقد جاءت للإجابة عن السؤال الآتي: إلى أي مدى يمكن توظيف معادلات الفرق الخطية المتجانسة في بناء نماذج رياضية دقيقة تصف سلوك الأنظمة الديناميكية المنفصلة؟ يبدأ البحث بتعريف معادلة الفرق وأدائها مثل مؤثر الفرق ومؤثر الإزاحة والمؤثر المحايد، ثم تصنيف معادلة الفرق ودراسة طرق حل معادلة الفرق الخطية المتجانسة، كما تم التركيز على النمذجة الرياضية للأنظمة الديناميكية المنفصلة، حيث اعتمد البحث على منهج النمذجة الرياضية التحليلي الذي تم من خلاله تحويل النظام إلى نموذج رياضي باستخدام معادلات الفرق، ثم تحليله لدراسة خصائصه وسلوكه عبر الزمن، وقد طبق هذا المنهج على نظام ديناميكي منفصل يمثل النمو السكاني، من خلال تحديد المتغيرات والمعاملات وبناء النموذج المناسب، ثم حل معادلة الفرق الناتجة وتمثيل نتائجها بيانياً لدراسة أثر معدل النمو. وتوصلت الورقة إلى أن معادلة الفرق الخطية المتجانسة تعد أداة قوية وفعالة في بناء نماذج رياضية تصف السلوك الديناميكي للأنظمة المنفصلة، وتفتح آفاقاً واسعة لتطبيقها في مجالات علمية متعددة.

الكلمات الدالة: معادلة الفرق الخطية المتجانسة، الأنظمة الديناميكية المنفصلة، النمذجة الرياضية، النمو السكاني.



Abstract

In light of the rapid developments in applied and mathematical sciences, mathematical modeling has become an essential tool for understanding and analyzing complex systems that evolve in the fields of environment, economics, or computer science. Among the important mathematical methods in this context, linear homogeneous difference equations stand out for their pivotal role in describing and analyzing discrete dynamical systems that evolve in fixed time steps. These equations provide accurate models that bridge the gap between mathematical theory and practical applications. This paper aims to highlight the role of linear homogeneous difference equations as a mathematical tool for constructing and analyzing discrete dynamical systems. It seeks to answer the following question: To what extent can linear homogeneous difference equations be employed to build accurate mathematical models that describe the behavior of discrete dynamical systems? The study begins by defining the difference equation and its associated operators, such as the difference operator, the shift operator, and the identity operator. It then presents the classification of difference equations and explores methods for solving linear homogeneous difference equations. The paper also focuses on the mathematical modeling of discrete dynamical systems, adopting an analytical modeling approach. This approach involves converting a system into a mathematical model using difference equations and then analyzing it to study its properties and behavior over time. To demonstrate this, the analytical modeling method was applied to a discrete dynamical system representing population growth. The study identified the variables and parameters, constructed the appropriate model, solved the resulting difference equation, and graphically represented the results to examine the effect of the growth parameter. The paper concludes that the linear difference equation is a powerful and effective tool for constructing mathematical models that describe the dynamic behavior of discrete systems, opening broad prospects for its application in various scientific fields.

Keywords: *Homogeneous Linear Difference Equation, Discrete Systems, Mathematical Modeling, Population Growth.*

1. المقدمة

المعادلات الرياضية هي الأداة التي تساعدنا على فهم الأنماط، وحل المشكلات التي تواجهنا في مجالات متعددة، سواء كانت في الفيزياء أو الاقتصاد أو حتى في الطبيعة من حولنا. من بين هذه المعادلات الرياضية نجد معادلات الفرق التي تسهم في تحليل الأنظمة الديناميكية ووصف تطورها خطوة بخطوة عبر الزمن، إذ تركز معادلات الفرق على التغير المنفصل، عكس المعادلات التفاضلية التي تصف التغير المستمر، وهذا ما يجعل معادلات الفرق ملائمة لنمذجة العديد من الظواهر التي تحدث في خطوات منفصلة مثل النمو السكاني (هذا ما تمت دراسته في هذا البحث)، وانتشار الأوبئة، تطور الأسواق المالية.

تعد معادلات الفرق الخطية المتجانسة بوجه خاص من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في دراسة وتحليل الأنظمة الديناميكية المنفصلة، لما توفره من منهجية دقيقة لدراسة استقرار الأنظمة وبناء نماذج رياضية تصف تطورها عبر خطوات زمنية محددة. من هذا المنطلق، جاء هذا البحث ليعبر مدى أهمية معادلات الفرق الخطية المتجانسة في بناء النماذج الرياضية وتحليل الأنظمة الديناميكية المنفصلة، وقد اعتمد البحث على منهج النمذجة الرياضية التحليلي الذي يقوم على تحويل الظواهر أو الأنظمة إلى نماذج رياضية باستخدام معادلات الفرق، ثم تحليلها لدراسة خصائصها وسلوكها عبر الزمن. وقد تم تطبيق هذا المنهج على نظام ديناميكي منفصل يمثل النمو السكاني، حيث تم تحديد المتغيرات والمعاملات وبناء النموذج المناسب، ثم حل معادلة الفرق الناتجة ودراسة الحل تحت شروط مختلفة لاستنتاج سلوك النظام، وتحليل مدى استقرار النظام بمرور الزمن.

تكمن أهمية النمذجة الرياضية في قدرتها على ربط المفاهيم النظرية بالتطبيقات العملية، إذ من خلالها يمكن تمثيل الأنظمة المعقدة بصيغ رياضية قابلة للتحليل، وكذلك تساعد على التنبؤ بسلوك الأنظمة المستقبلية وتفسير المتغيرات المختلفة على تطورها؛ مما يجعلها أداة أساسية في دعم واتخاذ القرارات في مجالات متعددة كعلم الأحياء، والاقتصاد، فهي ركيزة للتقدم العلمي والتقني؛ تثبت أن ما ندرسه من علوم نظرية كالرياضيات وغيرها يمكن تطبيقه على أرض الواقع وبفاعلية.

في هذه الورقة البحثية تم بناء نموذجين للنمو السكاني باستخدام معادلة الفرق الخطية المتجانسة أحدهما من الرتبة الأولى والآخر من الرتبة الثانية، ثم حلها تحليلياً ودراسة سلوكها عند قيم مختلفة لمعدل النمو. كذلك تم دعم التحليل النظري بتمثيل بياني باستخدام MATLAB لتوضيح مدى أثر تغير معدلات النمو على تطور النمو السكاني بمرور الزمن. تهدف الدراسة إلى معرفة مدى اعتماد النمذجة الرياضية على معادلات الفرق الخطية المتجانسة، وهل تمثل أداة أساسية في بناء نماذج رياضية ديناميكية منفصلة، مما يعزز دور الرياضيات في تفسير الظواهر الواقعية.

2. الجانب النظري

معادلات الفرق تمثل أداة رياضية قوية تستخدم لدراسة الأنظمة التي تتغير بشكل متكرر عبر الزمن. تعتمد هذه المعادلات على وصف العلاقة بين قيم متتالية لنظام معين؛ مما يسمح بتحليل كيفية تطور هذا النظام خطوة بخطوة.

تعتمد هذه المعادلات على التغير بين القيم الحالية، والقيم المستقبلية للنظام؛ مما يجعلها أداة أساسية لتحليل الأنماط الزمنية، التكرار والتطور التدريجي مثل النمو السكاني.

1.2. معادلة الفرق (Difference Equation)

تعريف: معادلة الفرق هي معادلات رياضية تصف العلاقة بين القيم المتتالية لنظام ديناميكي يتغير على فترات زمنية منفصلة. ويعبر عنها رياضياً بالصيغة التالية:

$$y_{n+r} = F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r-2}, y_{n+r-1}) \rightarrow (1)$$

حيث F دالة، r تمثل رتبة المعادلة، $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ (Levy & Lessman, 1992). معادلة الفرق العادية من الرتبة r هي علاقة تكتب على الشكل (1).

قبل التعمق في دراسة معادلات الفرق، من المهم التعرف على الأدوات والمفاهيم الرئيسية التي تشكل أساس هذه الدراسة، مثل مؤثر الفرق، ومؤثر الإزاحة.

1.1.2. مؤثر الفرق (Difference Operator):

مؤثر الفرق هو أداة رياضية تستخدم لحساب الفرق بين القيم المتتالية في متوالية أو دالة ما. يرمز له بالرمز Δ وهو أساس تحليل معادلات الفرق. التعبير: $y(x+1) - y(x)$ يسمى بالفرق $y(x)$ ويكتب على الصورة الرياضية التالية:

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) \rightarrow (2)$$

وهو يعبر عن مقدار التغير بين القيمة الحالية $y(x)$ والقيمة التالية $y(x+1)$ (Levy & Lessman, 1992).

إذا كان n عدداً صحيحاً، $y(x)$ معرفة فقط عند الأعداد الصحيحة بحيث $x = n$ فإنه يمكن كتابة مؤثر الفرق على الشكل التالي:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

ويمكن تعميم الشكل الأخير لحساب الفروق الأعلى رتبة (مؤثر الفرق الثاني، الثالث، وهكذا). حيث أن $\Delta y(x)$ يسمى بالفرق الأول (Levy & Lessman, 1992).

$$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y(x)) \quad \text{الآن:}$$

$$\begin{aligned} &= \Delta(y(x+1) - y(x)) \\ &= (y(x+2) - y(x+1)) - (y(x+1) - y(x)) \\ &= y(x+2) - 2y(x+1) + y(x) \end{aligned}$$

وبنفس الكيفية يمكننا حساب الفروق Δ^n للوصول إلى النتيجة التالية:

$$\begin{aligned} \Delta^n y(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} y(x)) \\ &= y(x+n) - ny(x+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(x+n-2) \\ &\quad + \dots + (-1)^n y(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(x+n-k) \rightarrow (3)$$

حيث: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Kelley & Peterson, 2001).

أهمية مؤثر الفرق: يستخدم لدراسة التغيرات في متواليات محددة ويعتبر حجر الأساس في صياغة معادلات الفرق وتحليل استقرار الأنظمة.

2.1.2. مؤثر الإزاحة (Shift Operator):

مؤثر الإزاحة والذي يرمز له بالرمز E ، هو أداة رياضية تستخدم لتحويل متغير الدالة إلى القيمة التالية في التسلسل. ويعرف مؤثر الإزاحة كالتالي (Kelley & Peterson, 2001):

$$Ey(x) = y(x+1) \rightarrow (4)$$

أي أن تطبيق E على $y(x)$ يؤدي إلى تحويله إلى القيمة التالية $y(x+1)$ وفق ما ذكره (Kelley & Peterson, 2001).

ويمكن تكرار تطبيق مؤثر الإزاحة للحصول على القيم المستقبلية مثل:

$$E^2y(x) = y(x+2), E^3y(x) = y(x+3), \dots, E^py(x) = y(x+p)$$

حيث p هو أي عدد صحيح، وبالتالي فإن E^p تعمل على دالة في المتغير x ، يزيد هذا المتغير بمقدار ثابت p . إذا كانت n عدداً صحيحاً، وكانت $y(x)$ معرفة فقط عند الأعداد الصحيحة بحيث $x = n$ ، فإنه يمكن كتابة مؤثر الإزاحة كما يلي (Levy & Lessman, 1992):

$$E^py_n = y_{n+p}$$

أهمية مؤثر الإزاحة: يستخدم مؤثر الإزاحة في صياغة معادلات الفرق وتحليلها رياضياً، ويفيد في التطبيقات التي تتطلب تحليل السلاسل الزمنية، والنماذج الديناميكية.

3.1.2. المؤثر المحايد I:

في معادلات الفرق، المؤثر المحايد والذي يرمز له بالرمز I ، هو العملية التي تتحرك المتتالية أو الدالة $y(x)$ كما هي دون أي تغيير. ويمكن تعريفه على أنه المؤثر الذي يعمل على المتتالية (الدالة) $y(x)$ ولا يحدث أي تغيير فيها (Kelley & Peterson, 2001). إذن:

$$Iy(x) = y(x)$$

تعريف معادلة الفرق: هي المعادلة التي تربط بين قيم الدالة y وواحد أو أكثر من الفروق $(\Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots)$ لكل قيم x لمجموعة من الأعداد S (والتي تكون الدالة y معرفة عندها) تسمى معادلة الفرق على المجموعة S حيث أن معادلة الفروق هي علاقة تتضمن فروقاً (Goldberg, 1958).

إذا أخذنا في الاعتبار الدالة y معرفة لجميع الأعداد الحقيقية $x \in \mathbb{R}$ ، فإن المعادلات التالية هي أمثلة على معادلات الفرق على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (Goldberg, 1958):

$$1) \Delta y(x) = \frac{1}{2}y(x)$$

$$2) \Delta^2 y(x) + 2\Delta y(x) + y(x) = 0$$

ويمكن كتابة معادلات الفرق أعلاه بشكل مكافئ بدون كتابة الرمز Δ :

$$1) \Delta y(x) = \frac{1}{2}y(x)$$

$$\rightarrow y(x+1) - y(x) = \frac{1}{2}y(x) \rightarrow y(x+1) = \frac{3}{2}y(x)$$

$$2) \Delta^2 y(x) + 2\Delta y(x) + y(x) = 0$$

$$\rightarrow (y(x+2) - 2y(x+1) + y(x)) + 2y(x+1) - 2y(x) + y(x) = 0$$

$$\rightarrow y(x+2) = 0$$

تعريف: رتبة معادلة الفرق هي الفرق الأقصى بين أكبر وأصغر مؤشر للمتغير y في المعادلة (Elaydi, 2005).

فمثلاً معادلة الفرق التالية:

$$y(x+2) - 4y(x+1) + 3y(x) = 0$$

هي معادلة فرق من الرتبة الثانية.

تعريف: درجة معادلة الفرق هي أكبر قوة يرفع إليها الحد ذو الرتبة الأعلى في المعادلة. فمثلاً معادلة الفرق التالية:

$$y(x+3) - y(x) = x$$

هي معادلة فرق من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

2.2. تصنيف معادلات الفرق

يمكن تصنيف معادلات الفرق إلى نوعين رئيسيين:

1.2.2. معادلات الفرق العادية:

إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي معادلة الفرق إلا على فروق عادية في هذه الحالة تسمى المعادلة معادلة فرق عادية، كالمعادلات التي تناولناها سابقاً. الصورة العامة لها:

$$F(x, y(x), y(x+1), y(x+2), \dots, y(x+n)) = 0 \rightarrow (5)$$

حيث $y(x)$ هو المتغير التابع عند الخطوة x ، و n هي رتبة معادلة الفرق، وهذه المعادلة تشبه المعادلات التفاضلية العادية ولكنها تستخدم مع المتغيرات المتقطعة.

2.2.2. معادلات الفرق الجزئية:

إذا كان المتغير التابع لمعادلة الفرق دالة في أكثر من متغير مستقل واحد، في هذه الحالة تسمى المعادلة معادلة فرق جزئية. فمثلاً معادلة الفرق:

$$u(x + 1, y + 1) + 2u(x, y) = x^2 + y + 1$$

هي معادلة فرق جزئية في متغيرين مستقلين x, y .

3.2. معادلة الفرق الخطية المتجانسة

هي معادلات فرق من الدرجة الأولى، تكون معادلة الفرق من الرتبة n خطية إذا أمكن كتابتها على الصورة:

$$a_n(x)y(x + n) + a_{n-1}(x)y(x + n - 1) + \dots + a_0(x)y(x) = r(x) \rightarrow (6)$$

حيث: $r(x), a_i(x), i = 1, 2, \dots, n, a_n, a_0 \neq 0$ دوال معرفة لجميع قيم x .

إذا كانت $r(x) = 0$ في المعادلة (6) تسمى معادلة فرق خطية متجانسة، وإذا كانت $r(x) \neq 0$ فإن المعادلة (6) تسمى معادلة فرق خطية غير متجانسة. فمثلاً المعادلة:

$$y(x + 1) - \frac{3}{2}y(x) = 0$$

هي معادلة فرق خطية متجانسة، بينما المعادلة:

$$y(x + 4) - y(x) = x2^x$$

هي معادلة فرق خطية غير متجانسة (Kelley & Peterson, 2001).

1.3.2. معادلات الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى:

لتكن $r(x), p(x)$ دوال معرفة في $x, p(x) \neq 0$ لكل x ، عندئذ معادلة الفرق الخطية من الرتبة الأولى تكون على الصورة:

$$y(x + 1) - p(x)y(x) = r(x) \rightarrow (7)$$

المعادلة المتجانسة لها هي:

$$y(x + 1) - p(x)y(x) = 0 \rightarrow (8)$$

2.3.2. حل معادلة الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى:

يمكن حل معادلة الفرق (8) اعتماداً على طبيعة معاملاتها، سواء كانت ثابتة أو متغيرة، حيث تختلف طريقة الحل وفقاً لذلك:

(1) إذا كانت $p(x)$ دالة في x فإن الحل يمكن إيجاده باستخدام الطريقة التالية:

طريقة الضرب التكراري: تُكتب معادلة الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى على الصورة:

$$y(x + 1) - p(x)y(x) = 0$$

ويمكن الحصول على الحل العام لها بسهولة عن طريق الضرب التكراري، إذا تم إعطاء قيمة أولية وتحديد مجال التعريف، فإن الحل العام للمعادلة (8) يكون على الصورة التالية:

$$y(x) = y(a) \prod_{s=a}^{x-1} p(s) \quad (x = a, a+1, \dots) \rightarrow (9)$$

حيث: $y(a)$ هي القيمة الابتدائية عند $x = a$ و $p(s)$ هي دالة معرفة على المجال المعطى (Kelley & Peterson, 2001).

على سبيل المثال فإن حل معادلة الفرق التالية باستخدام طريقة الضرب التكراري كالتالي:

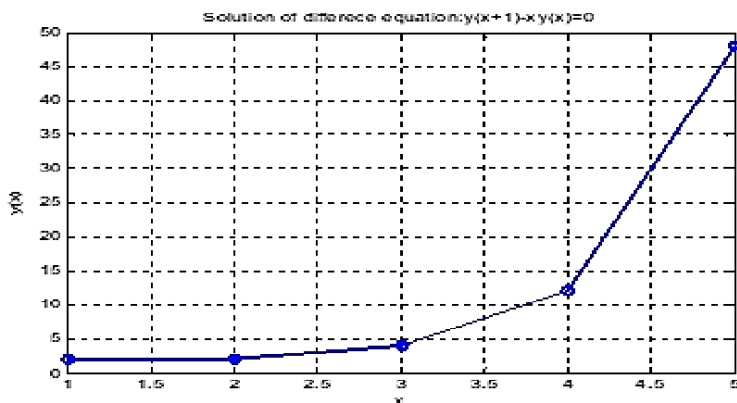
$$y(x+1) - xy(x) = 0 \quad x \in \mathbb{N}$$

بشرط ابتدائي: $y(1) = 2$ ، من المعادلة المعطاة نجد أن: $p(x) = x$ ، وحسب الشرط الابتدائي

$y(1) = 2$ فإن حل المعادلة المعطاة حسب الصيغة (9) يكون على الصورة:

$$y(x) = 2 \cdot \prod_{s=1}^{x-1} s = 2(x-1)!$$

يمكن توضيح سلوك الدالة $y(x)$ ضمن المجال المحدد من خلال رسم هذه الدالة:



شكل 1: حل معادلة الفرق $y(x+1) - xy(x) = 0$

يبين الشكل (1) سلوك الحل: $y(x) = 2(x-1)!$ لمعادلة الفرق $y(x+1) - xy(x) = 0$ مع الشرط الابتدائي المعطى. نلاحظ من خلال الرسم أن الحل يزداد بسرعة كبيرة مع تزايد x ، ويعكس هذا السلوك الطبيعة الديناميكية للمعادلة، ويوضح أن القيم الناتجة تصبح كبيرة جداً حتى ضمن مدى محدود من x .

(2) إذا كانت $p(x)$ متغير ثابت فإن معادلة الفرق تكون على الصورة:

$$y(x+1) - ay(x) = 0 \rightarrow (10)$$

حيث a ثابت، فإن الحل يعطى بالشكل $y(x) = C(a)^x$ حيث C ثابت.

فمثلاً حل معادلة الفرق: $y(x+1) - 2y(x) = 0$ ، هو: $y(x) = C2^x$.

حالات خاصة:

— إذا كانت $p(x) = C$ ، C ثابتاً فإن الحل العام يكتب على الشكل: $y(x) = y(a) \cdot C^n$.

— إذا كانت $p(x) = 1$ فإن الحل العام $y(x) = y(a)$.

— إذا كانت $p(x) = 0$ فإن الحل العام $y(x) = 0$.

3.3.2. معادلات الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة:

معادلة الفرق الخطية من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة:

$$a_n y(x+n) + a_{n-1} y(x+n-1) + \dots + a_0 y(x) = r(x) \rightarrow (11)$$

حيث: $a_1, a_2, \dots, a_n$ كلها ثوابت، $a_n, a_0 \neq 0$ (Kelley & Peterson, 2001). المعادلة المتجانسة

للمعادلة (11) هي:

$$a_n y(x+n) + \dots + a_1 y(x+1) + a_0 y(x) = 0 \rightarrow (12)$$

تعريفات:

(1) المعادلة:

$$m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0 \rightarrow (13)$$

تسمى "بالمعادلة المميزة" للمعادلة (12)، وهي معادلة جبرية من الدرجة n لها n من الحلول.

(2) الحلول $m_1, m_2, \dots, m_n$ للمعادلة المميزة تسمى "الجذور المميزة" (Kelley & Peterson, 2001).

لحل معادلة الفرق المتجانسة (12) يجب أن نجد جذور المعادلة المميزة (13)، وتتوقف صورة الحل

العام للمعادلة (12) على طبيعة الجذور للمعادلة المميزة. فقد تكون هذه الجذور أعداداً حقيقية

(مختلفة أو مكررة) أو مركبة. (Goldberg, 1958) لدينا ثلاث حالات:

— إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية مختلفة أي أن: $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$ عندئذٍ

يكون حل المعادلة (12) على الصورة التالية (Goldberg, 1958):

$$y(x) = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \dots + C_n m_n^x ; n = 1, 2, \dots$$

— إذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية متساوية، أي أن: $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ عندئذٍ فإن الحل العام للمعادلة (12) يكون على الصورة (Goldberg, 1958):

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}) m^x$$

— إذا كانت جذور المعادلة المميزة أعداداً مركبة، أي أن:

$$m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$$

$$m = re^{\pm i\theta} = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{بحيث أن:}$$

$$m^x = r^x e^{\pm i\theta x} = r^x (\cos \theta x \pm i \sin \theta x) \quad \text{عندئذٍ فإن:}$$

3. الجانب التطبيقي

1.3. النمذجة الرياضية للأنظمة الديناميكية المنفصلة

النظام الديناميكي هو نظام تتغير حالته مع الزمن الذي قد يكون متصلاً أو منفصلاً. أما النمذجة الرياضية فهي طريقة لتمثيل الأنظمة التي تتغير مع الزمن (مثل حركة السيارات، نمو البكتيريا وغيرها) باستخدام معادلات رياضية. تساعد هذه النماذج على فهم السلوك المستقبلي للنظام وتحسينه (Meerschaert, 2013). أي أن النمذجة الرياضية تعني تحويل هذا النظام إلى معادلات تصف علاقة المتغيرات ببعضها وبالزمن، وهي مهمة لمحاولة التنبؤ بسلوك النظام، أو تصميم أنظمة تحكم أو تحسين الأداء وتجنب الأخطاء.

جدول 1: مقارنة بين الأنظمة المتصلة والمنفصلة

الأنظمة المتصلة	الأنظمة المنفصلة
الزمن متغير مستمر (مثل 1.5 ث)	الزمن مقسم إلى خطوات (مثل: ث، 2ث، 3ث، ... إلخ)
توصف بمعادلات تفاضلية	توصف بمعادلات فرق
أمثلة: حركة سيارة، تدفق مياه	أمثلة: عدد العملاء في بنك كل ساعة، الإشارات الرقمية

أهمية الأنظمة المنفصلة: الأنظمة المنفصلة هي الأساس في العالم الرقمي (الحواسيب، الهواتف). كما أنها تستخدم في تحليل البيانات الزمنية (مبيعات متاجر، احصاءات يومية). وهي مثالية لنمذجة الأحداث التي تحدث في فترات محددة (مثل: انتخابات كل 4 سنوات).

2.3. تحويل أنظمة ديناميكية بسيطة إلى معادلات فرق

1.2.3. كيفية تحويل نظام ديناميكي بسيط إلى معادلات فرق:

سنقوم هنا ببناء نظام ديناميكي بسيط لنمو الأرناب باستخدام معادلات الفرق:
مثال: نظام نمو تعدد الأرناب في غابة كل عام. لتحويل هذا النظام إلى معادلات فرق نتبع الخطوات الآتية:

- حدد المتغيرات: $y(x)$ عدد الأرناب في العام x .
- حدد العلاقة بين الخطوات الزمنية: إذا زاد العدد كل عام بنسبة 20% فالمعادلة هي:

$$y(x+1) = 1.2y(x) \text{ أو } y(x+1) = y(x) + 0.2y(x)$$

– أضف عوامل خارجية إن وجدت: إذا ماتت 10 أرانب كل عام فإن:

$$y(x+1) = 1.2y(x) - 10$$

2.2.3. نموذج النمو السكاني الديناميكي المنفصل:

هو نموذج رياضي يستخدم معادلات الفرق الخطية لتمثيل تطور عدد السكان عبر الزمن بخطوات زمنية متقطعة (عادة سنة بسنة) مع الأخذ في الاعتبار عدد السكان الحالي، عدد المواليد، عدد الوفيات، صافي الهجرة (الوافدين-المغادرين)، وهذا النموذج يتيح لنا دراسة كيف تؤثر هذه العوامل على حجم السكان في المستقبل.

1) نموذج النمو السكاني باستخدام معادلة فرق خطية من الرتبة الأولى:

بناء النموذج الرياضي:

سنستخدم الترميز التالي:

$p(x)$: عدد السكان في السنة x . b : معدل المواليد السنوي (نسبة).

d : معدل الوفيات السنوي (نسبة). i : معدل الهجرة الوافدة (نسبة من السكان).

e : معدل الهجرة المغادرة (نسبة من السكان).

والمعادلة العامة لنموذج النمو السكاني باستخدام معادلة الفرق ستكون:

$$p(x+1) = p(x) + bp(x) - dp(x) + ip(x) - ep(x) \rightarrow (14)$$

حيث: $r = (1 + b - d + i - e)$ ، والصورة العامة (14) هي معادلة فرق خطية من الرتبة الأولى.

حل النموذج:

لدينا النموذج $p(x+1) = rp(x)$ ، حيث: $p(x)$ عدد السكان في السنة x ، r تمثل معدل النمو الصافي، و $p(0)$ يمثل عدد السكان الابتدائي. بما أن المعادلة (14) هي معادلة فرق خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة فإن الحل يكون على الصورة التالية:

$$p(x) = Cr^x$$

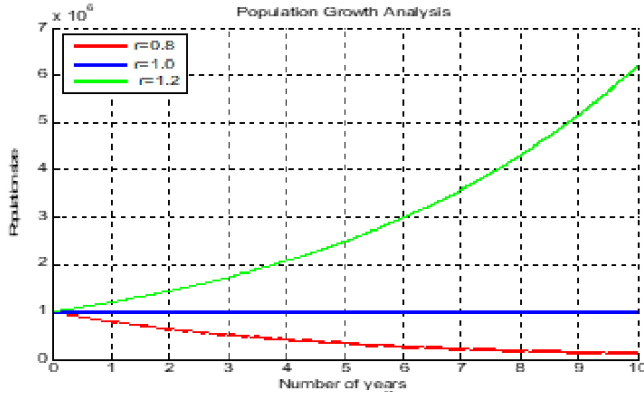
عندما $x = 0$ فإن $C = p(0)$ وبذلك فإن حل النموذج هو:

$$p(x) = p(0)r^x \rightarrow (15)$$

بالنظر إلى الحل (15) يمكننا استنتاج التالي بناءً على قيمة r :

- إذا كانت $r > 1$: عدد السكان ينمو مع الزمن (نمو سكاني).
- إذا كانت $r < 1$: عدد السكان يتناقص مع الزمن (انكماش سكاني).
- إذا كانت $r = 1$: عدد السكان يبقى ثابت.

لفهم تأثير معدل النمو r على عدد السكان عبر الزمن، نعرض في الشكل (2) تمثيلاً بيانياً لدالة الحل (15)، حيث تم اختيار عدد سكاني ابتدائي مقداره مليون نسمة، والفترة الزمنية تمتد إلى 10 سنوات. يوضح الرسم كيف تختلف نتائج النمو السكاني باختلاف قيم r .



شكل 2. تمثيل بياني للنمو السكاني باختلاف معدل النمو r

نلاحظ من الشكل (2) البياني سلوك النمو السكاني وفقاً لقيم مختلفة للمعدل r : فعندما $r = 1.2$ يظهر نمو أسي متزايد في عدد السكان، وكل فترة زمنية يزداد عدد السكان بنسبة 20%، ويعكس هذا الوضع مجتمعات ذات معدلات ولادة عالية أو زيادة في معدل الهجرة الوافدة. وعندما $r = 1.0$ يمثل عدداً ثابتاً من السكان، أي أنه لا يوجد تغيير في عدد السكان مع مرور الزمن؛ مما يشير إلى توازن تام بين معدلات المواليد والوفيات. وعندما $r = 0.8$ يعكس تناقصاً سكانياً تدريجياً، كل فترة زمنية ينخفض عدد السكان بنسبة 20%، ويحدث ذلك في مجتمعات تعاني من هجرة أو زيادة في معدل الوفيات.

(2) نموذج النمو السكاني باستخدام معادلة فرق خطية من الرتبة الثانية:

في هذا النموذج يعتمد النمو السكاني في السنة $(x + 2)$ على عدد السكان في السنتين السابقتين $(x + 1)$ ، x مع الافتراض أن العلاقة بين الأجيال خطية (لا توجد عوامل معقدة مثل الحروب والمنافسة على الموارد).

بناء النموذج الرياضي:

نستخدم الترميز التالي:

$p(x)$: عدد السكان في السنة x ، $p(x + 1)$ عدد السكان في السنة $x + 1$.

$b(x)$: معدل المواليد السنوي في السنة x ، $b(x + 1)$ معدل المواليد السنوي في السنة $x + 1$.

$d(x)$: معدل الوفيات السنوي في السنة x

$d(x+1)$: معدل الوفيات السنوي في السنة $x+1$.

$i(x)$: معدل الهجرة الوافدة في السنة x

$i(x+1)$: معدل الهجرة الوافدة في السنة $x+1$.

$e(x)$: معدل الهجرة المغادرة في السنة x

$e(x+1)$: معدل الهجرة المغادرة في السنة $x+1$.

لكل سنة معدلات نمو مختلفة تحسب بناء على عواملها الخاصة، لذا فإن:

$$p(x+2) = (1 + b(x+1) - d(x+1) + i(x+1) - e(x+1)).p(x+1) \\ + (b(x) - d(x) + i(x) - e(x)).p(x)$$

$$p(x+2) = r_1 p(x+1) + r_2 p(x) \rightarrow (16)$$

حيث r_1 يمثل صافي النمو للسنة $x+1$ ، r_2 يمثل التأثير المتأخر للسنة x .

التأثير المتأخر للسنة (x) :

يشير إلى أحداث أو عوامل حدثت قبل عامين (x) ، وأثرت على عدد السكان في السنة الحالية $(x+2)$ ، هذا يحدث لأن بعض العوامل تحتاج إلى وقت حتى تظهر نتائجها بشكل كامل، مثل سياسات تشجيع الهجرة أو الحد من الإنجاب.

حل النموذج:

لدينا النموذج $p(x+2) = r_1 p(x+1) + r_2 p(x)$ وهو عبارة عن معادلة فرق خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة، فإنه يمكن حل هذه المعادلة كالتالي:

$$p(x+2) - r_1 p(x+1) - r_2 p(x) = 0$$

من المعادلة المميزة $m^2 - r_1 m - r_2 = 0$ نحصل على: $m = \frac{r_1 \pm \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2}$ فالحل العام للمعادلة (16) بناءً على طبيعة الجذور يكون كالتالي:

- إذا كانت الجذور حقيقية مختلفة، فإن: $p(x) = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x$

- وإذا كانت الجذور حقيقية متساوية، فإن: $p(x) = (C_1 + C_2 x)m^x$

- وإذا كانت الجذور أعداداً مركبة، بحيث $m = \alpha \pm \beta i$ فإن:

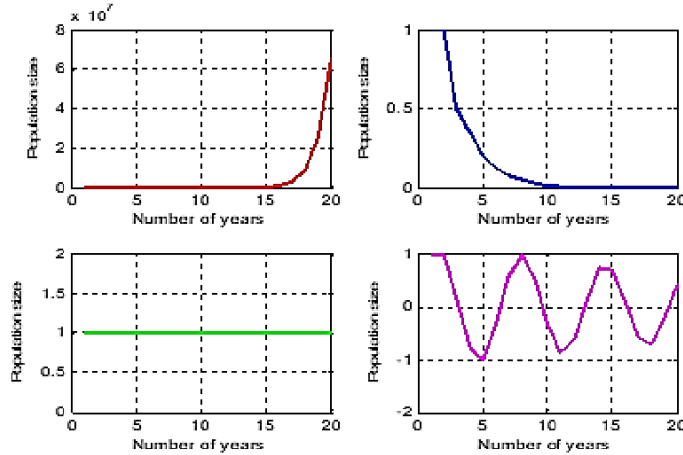
$$p(x) = r^x (C_1 \cos(\theta x) + C_2 \sin(\theta x)) \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

بالنظر إلى الحل يمكننا استنتاج التالي:

- إذا كانت $m_1 > 1$ و $m_2 > 1$ فإن $p(x)$ ينمو بشكل سريع جداً مع الزمن.

- إذا كانت $m_1 < 1$ أو $m_2 < 1$ فإن $p(x)$ يتناقص بمرور الزمن، أي أن النمو السكاني يتراجع.

- إذا كانت $m_1 = 1$ فإن طبيعة النمو للحل $p(x)$ تعتمد على الجذر الثاني، فإذا كان الجذر الثاني يساوي واحد فإن النمو يكون خطي، أي مستقر، وإذا كان أقل من الواحد فإن النمو يتذبذب مع الاستقرار أو النمو، وإذا كان أكبر من واحد فإن النمو يزداد حسب قيمة الجذر.
- إذا كانت الجذور مركبة فإن طبيعة النمو للحل $p(x)$ يكون متذبذب، أي أن عدد السكان يرتفع وينخفض بشكل دوري.



شكل 3: تمثيل بياني للنمو السكاني باختلاف قيم الجذور

من خلال الشكل (3) نلاحظ أن قيم الجذور واتجاهها تحدد مستقبل النمو السكاني، سواء باتجاه الزيادة، أو التناقص، أو الاستقرار، وهذا النموذج مهم جداً في السياسات السكانية، حيث يساعد على التنبؤ بالتغيرات المستقبلية في أعداد السكان وفقاً لتغيرات اقتصادية واجتماعية تؤثر على النمو.

4. الاستنتاجات

أظهرت هذه الدراسة أن معادلات الفرق الخطية المتجانسة تعد من الأدوات الرياضية الفعالة في بناء وتحليل سلوك الأنظمة التي تتغير مع مرور الزمن، إذ تسهم في دراسة سلوك الأنظمة المنفصلة عبر الزمن وتحليل استقرارها بدقة، وتشكل إطاراً رياضياً متكاملاً لفهم العلاقات الزمنية وتحليل الظواهر المختلفة بأسلوب علمي دقيق، كما أنها تستخدم بكفاءة في تحليل الأنظمة المنفصلة التي يصعب دراستها عبر المعادلات التفاضلية، كما أظهرت النتائج أن حلول معادلات الفرق الخطية المتجانسة توفر أدوات فعالة لدراسة استقرار الأنظمة على المدى الطويل، وتعد نموذجاً رياضياً قابلاً للتحليل والتطبيق في مجالات متعددة، مما يجعلها أداة مهمة تربط بين الجانب النظري والتطبيقي في الدراسات



الرياضية الحديثة. بذلك فإن هذا البحث قدّم تصوراً واضحاً لدور معادلات الفرق البسيطة (معادلات الفرق من الرتبة الأولى والثانية) في فهم أنظمة معقدة؛ مما يفتح الباب لدراسات أعمق حول الأنظمة غير الخطية، ويوفر أيضاً أدوات رياضية قابلة للتطبيق في مجالات أخرى مثل: التنبؤ بالتقلبات السكانية أو المالية، ونمذجة انتشار الأمراض. يُوصى في ضوء ما توصلت إليه هذه الدراسة بتوسيع نطاق البحث ليشمل دراسة معادلات الفرق غير المتجانسة والمتأثرة بعوامل خارجية، وكذلك دراسة الحلول العددية لمعادلات الفرق غير الخطية باستخدام برمجيات متخصصة (مثل MATLAB)، كما يُوصى بتطوير النماذج الرياضية ليشمل أنظمة ذات رتب عليا والتفاعلات المعقدة داخل الأنظمة الديناميكية، بما يساهم في تطوير الدراسات المستقبلية التي تربط بين التحليل الرياضي والتطبيق العملي في مجال النمذجة الرياضية.

المراجع

- Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed. Springer Science+Business Media.
- Goldberg, S. (1958). *Introduction to Difference Equations*. John Wiley & Sons.
- Kelley, W. G., & Peterson, A. C. (2001). *Difference Equations: An introduction with applications*, 2nd ed. Academic Press.
- Levy, H., & Lessman, F. (1992). *Finite Difference Equations*. Dover Publications.
- Meerschaert, M. M. (2013). *Mathematical modeling*, 4th ed. Academic Press.