



التحويلات الخطية وثنائية الخطية في المستوى المركب

فاطمة بن طاهر و هدى الذويبي*

قسم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

* البريد الإلكتروني: hu.alaweby@asmara.edu.ly

Linear and Bilinear Transformations on The Complex Plane

Fatima bin Taher and Huda Aldweby*

Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasmara Islamic University, Zliten, Libya.

الملخص

إن هذا البحث يقدم دراسة حول موضوع التحويلات الخطية وثنائية الخطية التي تعتبر من أهم مواضيع التحليل المركب والتي تلعب دورا كبيرا في دراسة نظرية الدوال الهندسية المركبة حيث عرضنا أولاً معنى مفهوم الدالة المركبة كراسم. ثانياً عرضنا التحويل الخطي وتحويل المعكوس وخصائصهما الهندسية. وأخيراً قمنا بعرض التحويلات الثنائية وبعض خصائصها الهندسية الهامة. كما ركزنا على وضع أمثلة مهمة تمكن من فهم طبيعة التحويلات. الكلمات الدالة: تحويل خطي، تحويل ثنائي خطي، دالة مركبة.

Abstract

This research examines both linear and bilinear transformations, which are fundamental topics in complex analysis and play a significant role in the study of geometric function theory. We begin by defining the concept of a complex function as a mapping. Next, we introduce linear transformations and reciprocal mappings, highlighting their geometric properties. Finally, we discuss bilinear transformations and explore some of their geometric characteristics. Throughout the study, we emphasize key examples to enhance understanding of the behavior of these transformations.

Keywords: Linear transformation, Bilinear transformation, Complex function.

1. المقدمة

تعتبر التحويلات الخطية والتحويلات الثنائية مواضيع أساسية في التحليل المركب لأنها تلعب دوراً مهماً

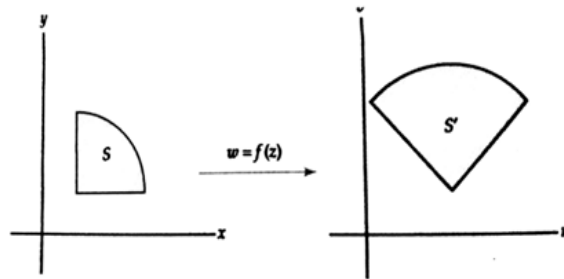
في إيجاد الشكل البياني للمناطق تحت تأثير الدوال المركبة. حيث أنه لا بد لأي باحث في مجال نظرية الدوال الهندسية أن يكون على دراية جيدة بموضوع التحويلات الخطية والثنائية في المستوى المركب. كما لاحظنا أن المكتبة العربية تفتقر إلى الدراسات المتعمقة حول موضوع التحويلات الهندسية في المستوى المركب، فكانت الحاجة ملحة لعرض هذا الموضوع لما له من أهمية بالغة عند بعض الباحثين المبتدئين في دراسة الدوال الهندسية لاسيما في ظل قلة المصادر المتاحة التي تساهم في إثراء هذا المجال من البحث العلمي. تكمن أهمية هذه التحويلات في استخدامها في تحليل الأشكال الهندسية بشكل مناسب حيث تساهم هذه التحويلات في فهم كيفية تأثير الدوال المركبة على الأشكال الهندسية المختلفة في المستوى المركب، كما أنها تساهم في توضيح المفاهيم المعقدة من خلال تمثيل المناطق المعقدة بصريا مما يسهل على الباحثين والمهندسين فهم وتحليل الأشكال المركبة بشكل أعمق وبذلك تساهم بشكل كبير في تسهيل التطبيقات العملية في مجالات عديدة مثل الفيزياء والهندسة (Arnold & Rogness, 2008).

1.1. الدوال المركبة كراسم

عند دراسة الدالة الحقيقية في متغير واحد فإن الشكل البياني للدالة هو منحنى في المستوى الديكارتي (الكارتيزي). من خلال هذه الأشكال البيانية يمكن إيجاد الخصائص الرياضية للدوال الحقيقية. في المستوى المركب نجد أن الشكل البياني للدالة يوجد في فضاء رباعي البعد ولذلك لا يمكن استخدام الأشكال البيانية لدراسة الدالة المركبة، لذلك كان فكرة الدالة المركبة كراسم التي تأسست بواسطة الرياضي الألماني بيرنارد ريمان لإيجاد المعنى الهندسي للدالة المركبة. هذه الفكرة بنيت على أساس أن الدالة المركبة ترسم تقابل بين النقاط في نسختين متطابقتين من المستوى المركب، بمعنى أوضح أن: النقطة z في المستوى z تقابل نقطة وحيدة $w = f(z)$ في المستوى w . لذلك نستخدم مصطلح بديل "تحويل أو راسم" بدلاً من تعبير "الدالة المركبة" (Conway, 2012).

2.1. المعنى الهندسي للراسم أو التحويل المركب

إذا كانت $w = f(z)$ راسماً مركباً والمجموعة S هي مجموعة من النقاط في المستوى z فإننا نقول إن مجموعة الصور للنقاط في S تحت تأثير f هي صورة S بواسطة f ويمكن أن نرمز لها بالرمز S' كما هو موضح في الشكل (1).



شكل 1. صورة المنطقة S تحت تأثير الدالة المركبة $f(z)$ هي S'

2. التحويل الخطي

كما في الدالة الحقيقية الخطية التي بالصيغة $f(x) = ax + b$ حيث a, b ثابتان حقيقيان، تسمى دالة خطية، فإن الدالة الخطية المركبة تأخذ الصيغة $f(z) = az + b$ حيث a, b ثابتان مركبان. تعتبر الدالة الخطية المركبة من أسهل الدوال المركبة في فهم سلوكها الهندسي. تعريف (1): هو تحويل دالي من الدرجة الأولى يُمثَّل بالعلاقة $w = f(z) = az + b$ حيث a, b ثابتان مركبان. ويتكوّن من تركيب ثلاث تحويلات هندسية أساسية وهي: الإزاحة، والدوران، والتكبير. ويُعدّ كل تحويل من هذه التحويلات حالة خاصة من التحويل الخطي (Hamburger, 1999). يعتبر التحويل الخطي تحويل أحادي في المستوى المركب ولذلك صورة أي شكل هندسي تكون مشابهة للشكل الأصلي مع تغيير في حجمها وموضعها. نعرض فيما يلي التحويلات الهندسية المكونة لأي تحويل خطي:

- الإزاحة: الدالة الخطية المركبة التي على الشكل $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$ تسمى تحويل إزاحة. تحت تأثير هذا التحويل يمكن إزاحة كل نقطة بمتجه يقابل b .
- الدوران: الدالة الخطية التي على الشكل $R(z) = az$, $|a| = 1$ تسمى تحويل دوراني.
- التكبير والتقليص: الدالة الخطية المركبة التي على الشكل $M(z) = az$, $a > 0$ تسمى تكبير. إذا كانت $0 < a < 1$ تسمى تقليصا.

1.2. أمثلة تحويلات خطية

مثال (1): إذا كانت $A(2,1), B(-1,1), C(1,-2)$ ، أجد صورة المثلث ABC بواسطة التحويل $w = (1 - i)z - 1 - i$

الحل: العدد المركب المقابل للنقطة $A(2,1)$ هو $z = 2 + i$

إذا صورة النقاط A, B, C هي النقاط:

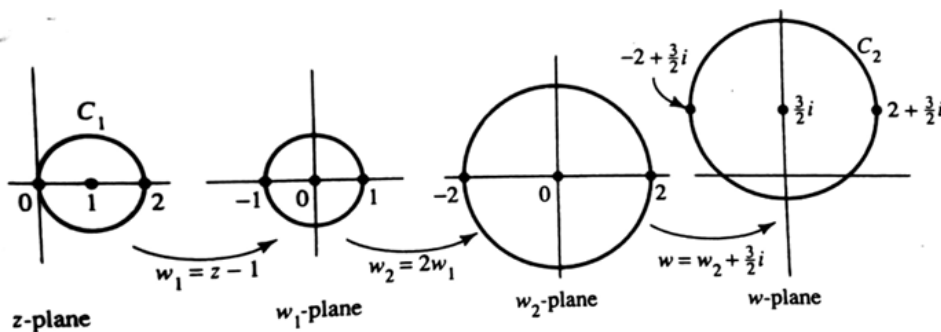
$$A' = (1 - i)(2 + i) - 1 - i = 2 - 2i$$

$$B' = (1 - i)(-1 + i) - 1 - i = -1 + i$$

$$C' = (1 - i)(1 - 2i) - 1 - i = -2 - 4i$$

مثال (2): أجد التحويل الخطي المناسب الذي ينقل الدائرة $C_1: |z - 1| = 1$ إلى الدائرة

$$C_2: |w - 3i/2| = 2$$



شكل 2. التحويل ينقل الدائرة $C_1: |z - 1| = 1$ إلى الدائرة $C_2: |w - 3i/2| = 2$.

الحل: بالرجوع إلى الشكل (2). نقوم أولاً بإزاحة بمقدار (1-) وبالتالي تصبح الدائرة دائرة الوحدة مركزه نقطة الأصل. ثم يليه تكبير بمعامل 2. وأخيراً إزاحة بمقدار $3/2$ على المحور التخيلي نحصل على الدائرة C_2 . ويمكن أن نكتب الصيغة العامة للتحويلات كالآتي:

$$w_1 = z - 1,$$

$$w_2 = 2w_1 = 2z - 2,$$

$$w_3 = w_2 + 3i/2 = 2z - 2 + 3i/2$$

ملاحظة (1): إن مصطلح تحويل خطي يستخدم في الرياضيات للدوال التي تحقق خاصية الخطية $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ بينما هنا نجد أن الدالة $w = az + b$ تتحقق فيها هذه الخاصية فقط عندما $b = 0$ وهذا من الملاحظات التي نجدها في هذا الموضوع. سوف نعرض فيما يلي تحويل المعكوس وهو من التحويلات الهامة التي لها علاقة مباشرة بالتحويل الثنائي.

3. تحويل المقلوب

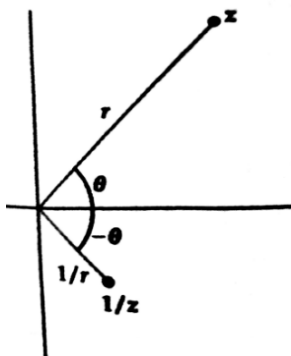
إن من أهم الدوال الكسرية في التحليل المركب هي دالة المعكوس $w = 1/z$ سوف ندرس هذه الدالة كتحويل في المستوى المركب. وسنجد أن من أهم خصائص هذا التحويل المركب أنه ينقل المستقيمات والدوائر إلى نفسها، الدالة $1/z$ التي نطاقها يكون كل المستوى المركب ماعدا النقطة $z = 0$ تسمي دالة المعكوس. ولكي ندرس هذه الدالة كتحويل علينا وضعها في الصورة الأسية.

إذا كانت $z \neq 0$ و $z = re^{i\theta}$ نحصل على الصورة الأسية الآتية:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad (1)$$

من المعادلة (1) نلاحظ أن: $|w|$ هو مقلوب $|z|$ ، $\arg w = -\arg z$ ، وبذلك نجد أن دالة المقلوب تنقل النقطة $z(r, \theta)$ في المستوى Z إلى النقطة $w(1/r, -\theta)$. الشكل (3) يوضح العلاقة بين z و $w = 1/z$ في نسخة واحدة من المستوى المركب. دالة المعكوس يمكن أن تكتب كتركيب دالي لمعكوس دائرة الوحدة والمرافق المركب. باستخدام الصيغ الأسية $c(z) = re^{-i\theta}$ و $g(z) = \frac{e^{i\theta}}{r}$ لهذه الدوال يمكننا إيجاد الدالة التركيبية $c \circ g$ المعرفة بواسطة:

$$c(g(z)) = c\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$



شكل 3. العلاقة بين z و $w = 1/z$

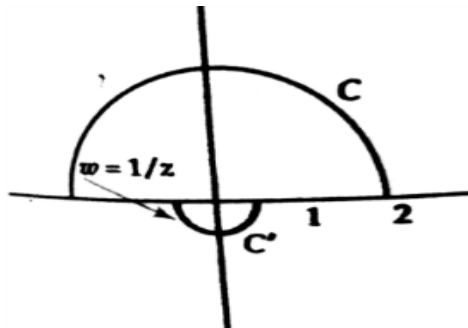
بمقارنة هذه الصورة مع المعادلة (1) نلاحظ أن:

$$c(g(z)) = f(z) = 1/z$$

هذا يقودنا لفهم طبيعة عمل دالة المعكوس كتحويل حيث أنها أولاً تنعكس بالنسبة لدائرة الوحدة ثم تنعكس حول المحور الحقيقي.

مثال (3): أجد صورة نصف الدائرة $|z| = 2, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$ تحت تأثير تحويل المعكوس $w = 1/z$.

الحل: نفرض أن C ترمز إلى نصف الدائرة الأصلية ونفرض أن C' ترمز إلى صورتها تحت تأثير تحويل المعكوس $w = 1/z$.

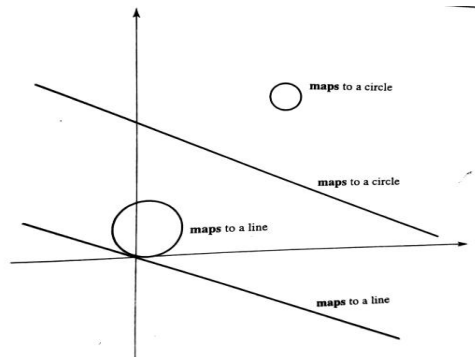


شكل 4. صورة نصف الدائرة تحت تحويل المعكوس

لكي نجد C' يجب علينا أولاً أن نعكس C في دائرة الوحدة ثم نقوم بانعكاس للشكل الناتج حول محور الأفقي (السينات)، سيكون الانعكاس بالنسبة لدائرة الوحدة، ستكون النقاط التي مقياسها لديها صورة بمقياس $\frac{1}{2}$ مع ملاحظة أن الانعكاس في دائرة الوحدة لا يغير قيمة الزوايا. لذلك صورة C بعد الانعكاس في دائرة الوحدة هو نصف الدائرة $|w| = \frac{1}{2}$. ثانياً نقوم بانعكاس حول محور الأفقي (السينات). الانعكاس يغير من اتجاه الزاوية ولا يغير من المقياس لأي نقطة ولذلك تكون الصورة في المستوى W هي:

$$|w| = \frac{1}{2}, -\pi \leq \arg(w) \leq 0$$

الشكل (4) يوضح هذا التحويل لقد تم استخدام نسخة واحدة من المستوى المركب في الشكل الموضح. إن من مميزات تحويل المعكوس إنه من السهل أن نفهم من خلاله ماذا ستكون الصورة تحت تأثير هذا التحويل (مستقيم أو دائرة). إذا كان المستقيم الأصلي أو الدائرة يقطع نقطة الأصل فإن الصورة سوف تحتوي على نقطة اللانهاية وهذا يعني أنها مستقيم. أما إذا كان المستقيم الأصلي أو الدائرة لا يقطع نقطة الأصل فهذا يعني أن الصورة ستكون محدودة بكفاف وبالتالي ستكون دائرة (انظر الشكل 5).



شكل 5. المستقيمات والدوائر التي تمر بنقطة الأصل وصورتها تحت تأثير $w = 1/z$

المناقشة السابقة تقودنا إلى التعريف التالي:

تعريف (2): دالة المعكوس المعرفة على المستوى المركب الموسع تكون دالة معرفة بالصورة الآتية (Markushevich, 2005):

$$f(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{if } z \neq 0 \text{ or } \infty \\ \infty, & \text{if } z = 0 \\ 0, & \text{if } z = \infty \end{cases}$$

نستنتج مما سبق أن تحويل المعكوس هو تحويل أحادي يحمل المستقيمات والدوائر إلى نفسها وهذه الخاصية يشترك فيها تحويل المقلوب مع تحويلات الإزاحة والدوران والتكبير.

4. التحويل الثنائي

إن دراسة الخصائص الهندسية تلعب دوراً مهماً في نظرية الدوال التحليلية الأحادية. هذا النوع من الدوال المركبة يسمى التحويلات المنتظمة لأنها تحافظ على اتجاه وقيمة الزوايا وهذا يقودنا لدراسة التحويلات الثنائية والتي هي تحويلات منتظمة أولية وتسمى أيضاً تحويلات خطية كسرية أو (تحويلات موبايوس-Möbius Transformations). التحويل الثنائي ينقل الدوائر والمستقيمات التي تقطع نقطة الأصل إلى مستقيمات كما تنقل الدوائر والمستقيمات التي لا تقطع نقطة الأصل إلى دوائر كما في الشكل (5) (Greenleaf et al., 2017)

تعريف (3): التحويل الثنائي هو أي دالة تكون على الشكل؛

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (1)$$

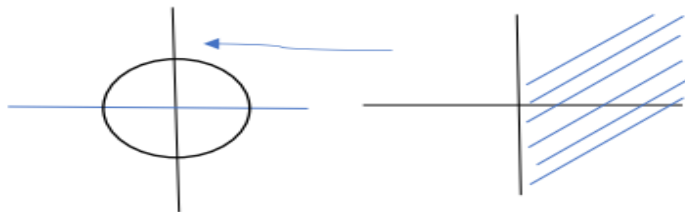
حيث a, b, c, d أعداد مركبة. عند إيجاد z بدلالة w من التحويل نحصل على التحويل العكسي؛

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad (2)$$

والذي يعتبر تحويل كسري أيضاً.

إذا كانت $c \neq 0$ يمكن إعادة كتابة التحويل المعادلة (1) بالصيغة $w = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{da}{c}}{cz+d}$ وهذه الصيغة تقابل التحويل الخطي $w_1 = cz + d$ ثم أخذ مقلوبه $w_2 = \frac{1}{w_1}$ ثم التطبيق الخطي $w = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{da}{c}\right)w_2$ إذا كانت $ad - bc = 0$ فإن التحويل (1) يؤدي إلى $w = \frac{a}{c}$ وهذا التحويل الثابت ينقل جميع نقاط المستوى Z إلى النقطة $\frac{a}{c}$ إذا كانت $c = 0$ فإن التحويل (1) يصبح تحويلاً خطياً.

إذا كانت $c \neq 0$ فإن التحويل (1) ينقل نقاط المستوى Z الموسع إلى نقاط المستوى W الموسع واحدة بواحدة ولذلك فإنه ينقل النقطة $z = \infty$ إلى النقطة $w = \frac{a}{c}$ والنقطة $z = -\frac{d}{c}$ إلى النقطة $w = \infty$. وبالتالي نستنتج أن صورة نقطة اللانهاية في التحويل الثنائي ليست اللانهاية. مثال (4): أثبت أن التحويل الثنائي $w = \frac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوى الأيمن $\Re(z) > 0$ إلى داخل القرص $|w| < 1$ (Ponnusamy, & Silverman, 2006).



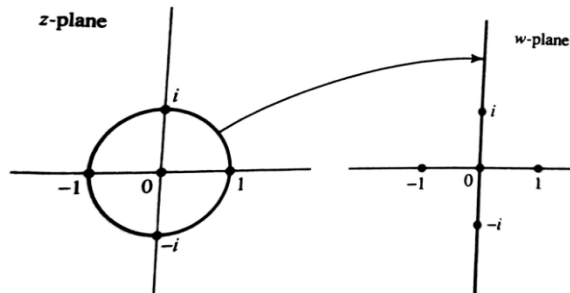
شكل 6. التحويل الثنائي ينقل نصف المستوى الأيمن إلى داخل القرص

الحل: نحل $w = \frac{z-1}{z+1}$ بالنسبة للمتغير z ينتج $z = \frac{1+w}{1-w}$ إذاً:

$$R(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}} \right] > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} > 0 \Rightarrow |w| < 1.$$

فيما يلي سوف نعرض مثال يوضح كيف يمكن اشتقاق تحويل منتظم (ثنائي) ينقل منطقة إلى أخرى. مثال (5): جد تحويل ثنائي ينقل قرص الوحدة $|z| < 1$ إلى الجزء الأيمن من المستوى المركب $\Re(w) > 0$ (Ponnusamy & Silverman, 2007).



شكل (7). تحويل ثنائي ينقل قرص الوحدة الى النصف الايمن من المستوي المركب

الحل: أولاً يجب علينا أن نبحث عن تحويل ثنائي $w = f(z)$ بحيث ينقل دائرة الوحدة $|z| = 1$ إلى المحاور التخيلي. لذلك فإن دالة التحويل يجب أن يكون لديها قطب على الدائرة. بالإضافة لذلك يجب أن تكون النقطة $w = 0$ ضمن صورة دائرة الوحدة. بمعنى أنه لا بد من وجود نقطة z_0 مثلاً تنتمي إلى دائرة الوحدة $|z| = 1$ بحيث يكون $f(z_0) = 0$. بالنظر في التحويل؛

$$w = f_1(z) = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (3)$$

نلاحظ أنه ينقل 1 إلى ∞ وينقل -1 إلى 0. ومن الخصائص الهندسية للتحويلات الثنائية نعلم أن التحويل (3) ينقل $|z| = 1$ إلى مستقيم يمر بنقطة الأصل. لكي نعرف أين يقع هذا المستقيم نعوض بالنقطة $z = i$ في (3) ونجد النقطة؛

$$w = \frac{i + 1}{i - 1} = -i$$

والتي تقع ايضاً على المستقيم. وبالتالي نستنتج أن صورة الدائرة تحت تأثير التحويل f_1 هي المحور التخيلي. الآن بقي علينا أن نعرف أي نصف (الأيمن أو الأيسر) من المستوي المركب هو صورة الداخلية لدائرة الوحدة. نلاحظ أن $f(0) = -1$ ، النقطة $w = -1$ تقع على النصف الأيسر ولكن هذا ليس هو ما نريد. ولكن يمكن تصحيح ذلك بدوران للتحويل (3) بزاوية π لنحصل على التحويل المطلوب؛

$$w = f(z) = -\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

إذا نكون بذلك وصلنا للتحويل الثنائي المطلوب.

مما عرضنا سبق يمكن تلخيص بعض خصائص التحويل الثنائي في النقاط التالية:

- يمكن كتابة دالة التحويل الثنائي كتركيب لتحويلات الازاحة والتكبير والدوران والمعكوس.
- دالة التحويل الثنائي تنقل المستوي المركب الموسع إلى نفسه.
- دالة التحويل الثنائي تنقل المستقيمات والدوائر إلى مستقيمات ودوائر.

— التحويل الثنائي تحويل منتظم عند كل نقطة في نطاقه ماعدا الاقطاب.

5. النسبة التبادلية

تعريف (4): النسبة التبادلية للأعداد المركبة Z, Z_1, Z_2, Z_3 هي العدد المركب $\frac{Z-Z_1}{Z-Z_3} \frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$ عند حساب النسبة التبادلية يجب علينا الاهتمام بترتيب الأعداد المركبة لأن النتيجة تكون مختلفة مثلاً، النسبة التبادلية للأعداد $0, 1, 2, i$ تكون $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$ بينما النسبة التبادلية للأعداد $0, i, 1, 2$ تكون $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ (Saff & Snider, 2003).

يمكن تعميم مفهوم النسبة التبادلية ليشمل المستوي المركب الموسع بتوظيف مفهوم النهاية.

بمعنى أنه لو كان Z هي ∞ فإن النسبة التبادلية تكون كالآتي:

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{Z - Z_1}{Z - Z_3} \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_1}$$

النظرية التالية توضح أهمية النسبة التبادلية في دراسة التحويلات الثنائية. على وجه

الخصوص سوف نبرهن أن النسبة التبادلية ثابتة تحت تأثير التحويل الثنائي.

نظرية (1): إذا كان التحويل ثنائي ينقل النقاط Z, Z_1, Z_2, Z_3 المختلفة إلى النقاط المختلفة

w, w_1, w_2, w_3 بشكل متتالي فإنه لكل Z تتحقق المعادلة الآتية (Zill & Shanahan, 2009):

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_3} \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \quad (4)$$

البرهان:

نفرض أن R تحويل ثنائي معرف بالصيغة:

$$R(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (5)$$

عند التعويض بالنقاط z_1, z_2, z_3 نجد أن $R(z_1) = 0, R(z_2) = 1, R(z_3) = \infty$ نفرض أيضاً

التحويل الثنائي:

$$S(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \quad (6)$$

بالنسبة للتحويل S نجد أن:

$$S(w_1) = 0, S(w_2) = 1, S(w_3) = \infty$$

لذلك التحويل الثنائي الخطي $T^{-1}(S^{-1}(R(z)))$ ينقل النقاط z_1, z_2, z_3 إلى النقاط w_1, w_2, w_3

على التوالي.

نستنتج بذلك أن التحويل ينقل النقاط $0, 1, \infty$ إلى النقاط $0, 1, \infty$ على التوالي.



وبالتالي يمكن استنتاج أن التحويل $T^{-1}(S^{-1}(R(z)))$ هو تحويل محايد بمعنى $R(z) = S(T(z))$ وهذا يكافئ التعبير الرياضي $R(z) = S(w)$ نجد أن: $w = T(z)$ من (5)، (6) يمكن استنتاج أن:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

من النظرية السابقة نستطيع القول بأن النسبة التبادلية تبقى ثابتة تحت تأثير التحويل الثنائي الخطي.

مثال (6): استنتج تحويلاً ثنائياً بحيث ينقل النقاط $1, i, -1$ على دائرة الوحدة $|z| < 1$ إلى النقاط $1, 0, -1$ على المحور الحقيقي. حدد صورة المنطقة $|z| < 1$ تحت تأثير هذا التحويل.
الحل: من النظرية السابقة التحويل الثنائي المطلوب $w = T(z)$ يجب أن يحقق المعادلة (4) وبالتعويض بالنقاط $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$ في المعادلة (4) نجد:

$$\frac{z - 1}{z - (-1)} \frac{i - (-1)}{i - 1} = \frac{w - (-1)}{w - 1} \frac{0 - 1}{0 - (-1)}.$$

بحل المعادلة بالنسبة w نحصل على التحويل الثنائي:

$$w = T(z) = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

نختبر النقطة $z = 0$ نحصل على $T(0) = i$ لذلك صورة المنطقة $|z| < 1$ تحت تأثير هذا التحويل تكون النصف العلوي من المستوى المركب $v > 1$.

الخاتمة

قمنا في هذا البحث بدراسة حول موضوع التحويلات الخطية وثنائية الخطية في المستوى المركب. لقد درسنا التحويل الخطي وتحويل المعكوس وبعض خصائصهما الهندسية والتي تعتبر حجر الأساس في فهم التحويلات ثنائية الخطية. كما تطرقنا أيضاً لدراسة التحويلات الثنائية والتي لديها عدة مسميات مرادفة لهذا المصطلح والأشهر منها (تحويلات موبايوس-Möbius Transformations). كما بينا أن هذه التحويلات أحادية في نطاقها. كذلك عرضنا الخصائص الهندسية لها والمهمة جداً في دراسة أي موضوع خاص بنظرية الدوال الهندسية. كما لم ننسى دعم كل هذه الحقائق بأمثلة مدعمة بصور المناطق تحت تأثير هذه التحويلات والذي من شأنه زيادة الفهم لدى القارئ المبتدئ بهذا المجال.



المراجع

- Arnold, D. N., & Rogness, J. P. (2008). Möbius Transformations revealed. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(10), 1226-1231.
- Conway, J. B. (2012). *Functions of one complex variable II*. Springer Science & Business Media.
- Hamburger, M. L. (1999). Linear Transformations. *CUP Archive*.
- Greenleaf, A., Iosevich, A., Krause, B. & Liu, A. (2017). Bilinear Generalized Radon Transforms in the plane. *ArXiv preprint arXiv*: 1704. 00861.
- Markushevich, A. I. (2005). *Theory of Functions of A Complex Variable* (vol. 296). American Mathematical Soc.
- Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2006). Bilinear Transformations and Mapping. *Complex Variables with Applications*, 61-90.
- Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2007). *Complex variables with applications*. Springer Science & Business Media.
- Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science*, 3rd ed. Prentice Hall : Pearson Education.
- Zill, D., & Shanahan, P. (2009). *A first course in complex analysis with applications*. Jones & Bartlett Learning.