



تطبيق تحويل سمودو التكاملية في حل بعض المسائل على الدوائر الكهربائية

ياسمين محمد حميدة* و نبيلة ابراهيم اغويلة

قسم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زلiten، ليبيا.

*البريد الإلكتروني: yasmynmhmdhmydh605@gmail.com

Sumudu Integral Transformation Application on Solving Some Problems on Electric Circuits

Yasmin Mohammed Hameda* and Nbila Ibrahim Gwila

Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasmarya Islamic University, Zliten, Libya.

الملخص

حظيت دراسة التحويلات التكاملية باهتمام كبير من الباحثين نظراً لاتساع نطاق تطبيقاتها في مجالات متعددة، بما في ذلك الرياضيات التطبيقية والفيزياء. وقد أسهمت هذه التحويلات بشكل كبير في تبسيط المعادلات التفاضلية والتكاملية من خلال تحويلها إلى صيغ جبرية يسهل حلها. يهدف هذا البحث إلى دراسة تطبيق تحويل سمودو (Sumudu Integral Transformation) في حل مسائل القيم الابتدائية التي تصف الدوائر الكهربائية. ولإظهار فاعلية هذا التحويل، تم تناول أربع مسائل مختلفة للدوائر الكهربائية. ومن خلال استخدام تحويل سمودو، تم الحصول على الحلول الدقيقة لهذه المسائل. الكلمات الدالة: تحويل سمودو، الدوائر الكهربائية، الحل الفعلي، الشروط الابتدائية، تحويل المشتقات.

Abstract

The study of integral transformations has received considerable attention from researchers due to their wide range of applications in various fields, including applied mathematics and physics. These transformations have contributed significantly to simplifying differential and integral equations by converting them into algebraic forms that are easier to solve. This paper investigates the application of the Sumudu integral transformation to solve initial value problems describing electrical circuits. To demonstrate its effectiveness, four different electrical circuit problems are considered. Using the Sumudu integral transformation, we obtain exact solutions to these problems.

Keywords: Sumudu transformation, Electrical circuits, Exact solution, Initial conditions, Laplace transform.

1. المقدمة

تعد التحويلات التكاملية أحد المواضيع البحثية المهمة التي تم التركيز عليها من قبل الباحثين في فروع العلوم التطبيقية المختلفة، وأصبحت جزءاً أساسياً من الرياضيات التطبيقية لما لها من دور مهم في مجالات عدة تشمل الرياضيات والفيزياء والميكانيكا، حيث تساهم في حل المعادلات التفاضلية وذلك بتحويلها إلى معادلات جبرية يمكن التعامل معها بسهولة. ويعتبر تحويل سمودو أحد هذه التحويلات التكاملية وله العديد من التطبيقات الواسعة، فباستخدامه تم إيجاد حلول دقيقة لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية العادية المتجانسة وغير المتجانسة (Tuluze Demiray et al., 2015). كما تم اظهار مدى قابلية تطبيق تحويل سمودو وفعاليتيه في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية (Ur Rehman & Ahmed, 2023). أيضاً تم حل معادلة فولتيرا التفاضلية من النوع الأول مع نواة الالتفاف (Aggarwal et al., 2020). تم تطبيق تحويل سمودو في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وغير الثابتة (Eltayeb & Kilicman, 2010). التطبيقات الكهربائية تعتبر أحد تطبيقات التحويلات التكاملية؛ والتي استخدمت لحل مسائل القيم الابتدائية التي تصف الدوائر الكهربائية. نوقشت تطبيقات تحويل لابلاس وتحويل سمودو في مجال الفيزياء متبوعة بتطبيقاتهما على الدوائر الكهربائية مع مقارنة نتائج هذين التحويلين (Vashi & Timol, 2016).

الهدف من هذا البحث هو دراسة لتطبيق تحويل سمودو التكامل في حل بعض المسائل على الدوائر الكهربائية حيث يتم تحويل المعادلات التفاضلية التي تصف هذه الدوائر الى معادلات جبرية يسهل حلها.

2. التعريف الرياضي لتحويل سمودو

يعرف تحويل سمودو للدالة $F(t)$ ، حيث $t \geq 0, F(t) \in A$ والذي يرمز له بالرمز $S[F(t)]$ أو $f(s)$ بالصيغة التالية (jeevitha et al., 2021):

$$S[F(t)] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{s}} F(t) dt = f(s), s \in (-\tau_1, \tau_2)$$

ويتم إيجاد التكامل المعتل بالنهاية:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^b e^{-\frac{t}{s}} F(t) dt = f(s)$$

لهذا يمكن أن يكون تحويل سمودو موجود أو غير موجود تبعاً لوجود أو عدم وجود النهاية.

3. الخاصية الخطية لتحويل سمودو

في هذا البند سيتم توضيح الخاصية الخطية من خلال النظرية التالية (Jeevitha et al., 2021):
إذا كانت $F_2(t), F_1(t)$ دوال في المتغير t وكان c_2, c_1 ثوابت فإن:

$$S[c_1[F_1(t)] + c_2[F_2(t)]] = c_1S[F_1(t)] + c_2S[F_2(t)]$$

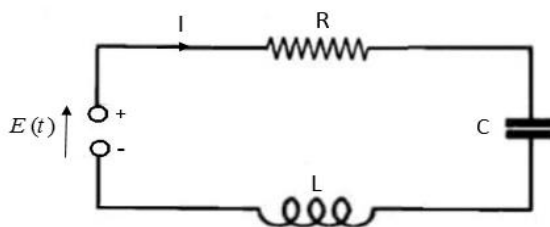
4. تحويل سمودو للمشتقات

إذا كان $f(s)$ تحويل سمودو للدالة $F(t)$ حيث $S[F(t)] = f(s)$ فإن:

$$\begin{aligned} S[F'(t)] &= \frac{f(s)}{s} - \frac{F(0)}{s} \\ S[F''(t)] &= \frac{f(s)}{s^2} - \frac{F(0)}{s^2} - \frac{F'(0)}{s} \\ S[F^{(n)}(t)] &= \frac{f(s)}{s^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F(0)^{(k)}}{s^{n-k}} \end{aligned}$$

مثال (1)

يوجد في الدائرة (Rcl) : $C = 10^{-2}Farad, R = 100ohms, L = 1/2Heneray$ ، وجهد مؤثر $E = 12Volts$ وبفرض عدم وجود تيار ابتدائي أو شحنة ابتدائية عند $t = 0$ أوجد التيار الناتج في النظام (شكل 1).



شكل 1. دائرة Rcl المثال (1). (Bronson, 1989)

الحل:

المعادلة التفاضلية للتيار المار في الدائرة Rcl هي:

$$\begin{aligned} \frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I &= 0 \\ I(0) = 0, I'(0) &= 24 \end{aligned}$$

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة نتحصل على:

$$S[I''] + 20S[I'] + 200S[I] = 0$$

$$\frac{i}{s^2} - \frac{I(0)}{s^2} - \frac{I'(0)}{s^2} + 20\frac{i}{s} - 20\frac{I(0)}{s} + 200i = 0$$

$$\frac{i}{s^2} - \frac{24}{s} + 20\frac{i}{s} + 200i = 0$$

$$i - 24s + 20is + 200s^2i$$

$$i(1 + 20s + 200s^2)$$

$$i = \frac{24s}{(1 + 20s + 200s^2)} = \frac{24s}{(1 + 10s)^2 + 100s^2}$$

$$i = \frac{12}{5} \left[\frac{10s}{(1 + 10s)^2 + 100s^2} \right]$$

علم أن: $S^{-1} \left[\frac{as}{(1-bs)^2 + a^2s^2} \right] = e^{bt} \sin at$

وبالتالي: $I = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t$

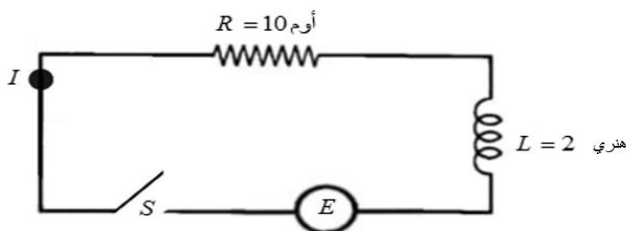
مثال (2)

دائرة كهربائية تحتوي على مقاومة R بقيمة 10 أوم، وملف حيث L بقيمة 2 هنري، وبطارية ذات جهد E فولت، متصلة على التوالي مع مفتاح S . عند لحظة زمنية $t = 0$ ، يتم إغلاق الدائرة ويكون التيار الكهربائي I في البداية يساوي صفر. المطلوب حساب قيمة التيار I عندما $t > 0$ إذا كان:

(أ) $E = 40$

(ب) $E = 20e^{-3t}$

(ج) $E = 50 \sin 5t$



شكل 2. الدائرة الكهربائية المثال (2) (Spiegel, 1982)

الحل:

المعادلة التفاضلية هي: $\frac{dI}{dt} + 5I = \frac{E}{2}, I(0) = 0$

(أ) إذا كان $E = 40$:

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 20$$

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة نتحصل على:

$$S[I'] + 5S[I] = 20$$

$$\left(\frac{i}{s} - \frac{I(0)}{s}\right) + 5i = 20$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائي $I(0) = 0$ نتحصل على:

$$\frac{i}{s} + 5i = 20$$

$$i(1 + 5s) = 20s$$

$$i = \frac{20s}{1 + 5s} = 4 - \frac{4}{1 + 5s}$$

$$i = 4\left[1 - \frac{1}{1 + 5s}\right]$$

$$I = 4S^{-1}\left[1 - \frac{1}{1 + 5s}\right]$$

$$I = 4(1 - e^{-5t})$$

(ب) إذا كان $E = 20e^{-3t}$:

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 10e^{-3t}, I(0) = 0$$

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة نتحصل على:

$$S[I'] + 5S[I] = 10S[e^{-3t}]$$

$$\left(\frac{i}{s} - \frac{I(0)}{s}\right) + 5i = \frac{10}{1 + 3s}$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائي $I(0) = 0$ نتحصل على:

$$\frac{i}{s} + 5i = \frac{10}{1 + 3s}$$

$$i(1 + 5s) = \frac{10}{1 + 3s}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نتحصل على:

$$i = \frac{5}{1 + 3s} - \frac{5}{1 + 5s}$$

$$I = 5S^{-1}\left[\frac{1}{1 + 3s}\right] - 5S^{-1}\left[\frac{1}{1 + 5s}\right]$$

$$I = 5e^{-3t} - 5e^{-5t}$$

(ج) إذا كان $E = 50 \sin 5 t$:

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 25 \sin 5 t$$

بتطبيق تحويل سمودو في المعادلة نتحصل على:

$$S[I'] + 5S[I] = 25S[\sin 5 t]$$

$$\left(\frac{i}{s} - \frac{I(0)}{s}\right) + 5i = \frac{125s}{1 + 25s^2}$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائي نتحصل على:

$$\frac{i}{s} + 5i = \frac{125s}{1 + 25s^2}$$

$$i(1 + 5s) = \frac{125s^2}{1 + 25s^2}$$

$$i = \frac{125s^2}{(1 + 25s^2)(1 + 5s)}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نتحصل على:

$$i = \frac{5}{2} \left[\frac{1}{1 + 5s} \right] + \frac{5}{2} \left[\frac{5s}{1 + 25s^2} \right] - \frac{5}{2} \left[\frac{1}{1 + 25s^2} \right]$$

$$I = \frac{5}{2} S^{-1} \left[\frac{1}{1 + 5s} \right] + \frac{5}{2} S^{-1} \left[\frac{5s}{1 + 25s^2} \right] - \frac{5}{2} S^{-1} \left[\frac{1}{1 + 25s^2} \right]$$

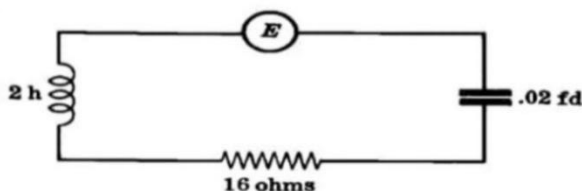
$$I = \frac{5}{2} e^{-5t} + \frac{5}{2} \sin 5 t - \frac{5}{2} \cos 5 t$$

مثال (3)

ملف حث بقيمة 2 هنري، ومقاومة بقيمة 16 أوم، ومكثف بسعة 0.02 فاراد متصلون على التوالي مع قوة دافعة كهربائية (e. m. f) مقدارها E فولت، عند $t = 0$ ، تكون الشحنة على المكثف والتيار في الدائرة مساويين الصفر. أوجد الشحنة والتيار عند أي زمن $t > 0$ في الحالتين التاليتين:

$$E = 300 \text{ Volts} \quad (\text{أ})$$

$$E = 100 \sin 3t \text{ Volts} \quad (\text{ب})$$



شكل 3. الدائرة الكهربائية المثال (3) (Spiegel, 1965)

الحل:

لتكن Q و I الشحنة والتيار اللحظيين على التوالي عند الزمن t . ووفقاً لقوانين كيرشوف، لدينا:

$$2 \frac{dI}{dt} + 16 \frac{dQ}{dt} + 50Q = E \rightarrow (1)$$

مع الشروط الابتدائية $Q(0) = 0, I(0) = Q'(0) = 0$.

(أ) إذا $E = 300 V$

إذا أصبح المعادلة (1):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{8dQ}{dt} + 25Q = 150$$

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة نتحصل على:

$$S[Q''] + 8S[Q'] + 25S[Q] = 150$$

$$\left(\frac{q}{s^2} - \frac{Q(0)}{s} - \frac{Q'(0)}{s}\right) + 8\left(\frac{q}{s} - \frac{Q(0)}{s}\right) + 25q = 150$$

$$\frac{q}{s^2} + 8\frac{q}{s} + 25q = 150$$

$$q + 8sq + 25s^2q = 150s^2$$

$$q = \frac{150s^2}{(1 + 8s + 25s^2)} = 6 - \frac{6 + 48s}{(1 + 8s + 25s^2)}$$

$$= 6 - \frac{6(1 + 4s) + 24s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2}$$

$$= 6 - \frac{6(1 + 4s)}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} - \frac{24s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2}$$

$$Q = 6S^{-1}[1] - 6S^{-1}\left[\frac{(1 + 4s)}{(1 + 4s)^2 + 9s^2}\right] - 8S^{-1}\left[\frac{3s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2}\right]$$

$$Q = 6 - 6e^{-4t} \cos 3t - 8e^{-4t} \sin 3t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t} \sin 3t$$

(ب) إذا $E = 100 \sin 3t$:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \sin 3t \quad \text{إذا أصبح المعادلة (1):}$$

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة نتحصل على:

$$S[Q''] + 8S[Q'] + 25S[Q] = 50S[\sin 3t]$$

$$\left(\frac{q}{s^2} - \frac{Q(0)}{s} - \frac{Q'(0)}{s}\right) + 8\left(\frac{q}{s} - \frac{Q(0)}{s}\right) + 25q = \frac{150s}{1 + 9s^2}$$

$$(1 + 8s + 25s^2)q = \frac{150s^2}{1 + 9s^2}$$

$$q = \frac{150s}{(1 + 9s^2)(1 + 8s + 25s^2)}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نتحصل على:

$$q = \frac{75}{26} \left[\frac{s}{1 + 9s^2} \right] - \frac{75}{52} \left[\frac{1}{1 + 9s^2} \right] + \frac{75}{26} \left[\frac{s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right] + \frac{75}{52} \left[\frac{1 + 4s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right]$$

$$q = \frac{25}{26} \left[\frac{3s}{1 + 9s^2} \right] - \frac{75}{52} \left[\frac{1}{1 + 9s^2} \right] + \frac{25}{26} \left[\frac{3s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right] + \frac{75}{52} \left[\frac{1 + 4s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right]$$

$$Q = \frac{25}{26} S^{-1} \left[\frac{3s}{1 + 9s^2} \right] - \frac{75}{52} S^{-1} \left[\frac{1}{1 + 9s^2} \right] + \frac{25}{26} S^{-1} \left[\frac{3s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right] + \frac{75}{52} S^{-1} \left[\frac{1 + 4s}{(1 + 4s)^2 + 9s^2} \right]$$

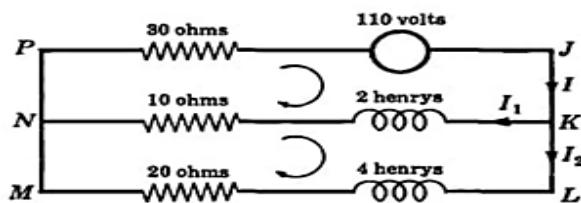
$$Q = \frac{25}{26} \sin 3t - \frac{75}{52} \cos 3t + \frac{25}{26} e^{-4t} \sin 3t + \frac{75}{52} e^{-4t} \cos 3t$$

$$Q = \frac{25}{26} (2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t} (3 \cos 3t + 2 \sin 3t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52} (2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t} (17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$$

مثال (4)

بالنظر إلى شبكة الكهرباء في الشكل (4) حدد التيارات في الفروع المختلفة إذا كانت التيارات الابتدائية تساوي الصفر.



شكل 4. شبكة الكهرباء المثال (4) (Spiegel, 1965)

الحل:

ينص قانون كيرشوف الثاني على أن المجموعة الجبرية للفولتية أو السقوط الجهد حول حلقة يساوي صفر. لنأخذ الحلقات $JKNP$ و $KLMNP$ في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة كما هو موضح بالشكل (4) أثناء عبورنا لهذه الحلقات سنعتبر انخفاض الجهد موجبا عندما نتحرك ضد التيار ويعتبر ارتفاع الجهد بمثابة انخفاض في الجهد.

لنفرض أن I هو التيار في $NPJK$. هذا التيار ينقسم عند النقطة K إلى I_1, I_2 بحيث:

$$I = I_1 + I_2$$

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني على الحلقات $KLMNK$ و $JKNPJ$ ، نتحصل على:

$$-10I_1 - 2 \frac{dI_1}{dt} + 4 \frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0$$

$$30I - 110 + 2 \frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0$$

أو

$$-5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55$$

مع الشروط الابتدائية $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

بتطبيق تحويل سمودو على طرفي المعادلة التفاضلية نتحصل على:

$$-5S[I_1] - S[I_1'] + 2S[I_2'] + 10S[I_2] = 0$$

$$S[I_1'] + 20S[I_1] + 15S[I_2] = 55$$

$$-5i_1 - \left(\frac{i_1}{s} - \frac{I_1(0)}{s}\right) + 2\left(\frac{i_2}{s} - \frac{I_2(0)}{s}\right) + 10i_2 = 0$$

$$\left(\frac{i_1}{s} - \frac{I_1(0)}{s}\right) + 20i_1 + 15i_2 = 55$$

وبالتعويض بالشروط الابتدائية نتحصل على:

$$(1 + 5s)i_1 - (2 + 10s)i_2 = 0$$

$$(1 + 20s)i_1 + 15si_2 = 55s$$

من المعادلة الأولى $i_1 = 2i_2$ ، بحيث تنتج المعادلة التالية:

$$(1 + 20s)2i_2 + 15si_2 = 55s$$

$$(2 + 55s)i_2 = 55s$$

$$i_2 = \frac{55s}{(2 + 55s)}$$

$$i_2 = 1 - \frac{2}{(2 + 55s)}$$

$$i_2 = 1 - \frac{1}{(1 + \frac{55}{2}s)}$$

$$I_2 = S^{-1}[1] - S^{-1}\left[\frac{1}{(1 - \frac{55}{2}s)}\right]$$

$$I_2 = 1 - e^{-\frac{55}{2}t}$$



$$\begin{aligned}I_1 &= 2I_2 \\I_1 &= 2 - 2e^{-\frac{55}{2}t} \\I &= I_1 + I_2 \\I &= 3 - 3e^{-\frac{55}{2}t} \\I &= 3(1 - 1e^{-\frac{55}{2}t})\end{aligned}$$

5. الخاتمة

في ختام هذه البحث يتضح الدور المهم الذي يلعبه تحويل سمودو التكامل في تسهيل حل المعادلات التفاضلية، ومن خلال دراسة تطبيق تحويل سمودو على الدوائر الكهربائية تم إبراز فعالية هذا التحويل في إيجاد حلول سلسلة للمسائل للحصول على حلول فعلية للمعادلات التفاضلية التي تصف هذه الدوائر. لذلك يمكن التوصية باستخدام هذا التحويل بشكل أوسع في الدراسات المستقبلية خاصة في المجالات التي تتطلب حلولاً دقيقة وفعالة للمعادلات التفاضلية.

المراجع

- Aggarwal, S., Sharma, S. D., & Vyas, A. (2020). Application of Sumudu transform for handling volterra integro-differential equation of first kind with convolution kernel. *International Journal of Research and Innovation in Applied Science*, 5(8), 24-30.
- Bronson, R. (1989). *2500 Solved Problems in Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
- Eltayeb, H., & Kilicman, A. (2010). A note on the Sumudu transforms and differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, 4(22), 1089-1098.
- Jeevitha, S., Komala, S., Silambarasi, S., Susitha, S., & Vanitha, R. (2021). An introduction of Sumudu transform. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, 8(7), 771-778.
- Spiegel, M. R. (1982). *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill House.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum's outline of theory and problems of Laplace transforms*. New York: McGraw-Hill
- Tuluze Demiray, S., Bulut, H., & Belgacem, F. B. M. (2015). Sumudu transform method for analytical solutions of fractional type ordinary differential equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(1), 131690.
- Ur Rehman, M. M., & Ahmed, I. (2023). An overview of Sumudu transform with ordinary differential equations. *EPRA International Journal of Research & Development*, 8(10), 100-112.
- Vashi, J., & Timol, M. G. (2016). Laplace and Sumudu transforms and their application. *Int. J. Innov. Sci., Eng. Technol*, 3(8), 538-542.