



تطبيق جديد لتحويل إلزاكي التكاملي لدراسة إنحناء العوارض المرنة وفق نظرية أويلر - بيرنولي

صفاء محمد معتوق¹، علي فرج فرحات^{2,*}، و مروة محمد معتوق¹

⁽¹⁾ قسم الرياضيات (قاطع ماجر)، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

⁽²⁾ قسم الرياضيات، كلية العلوم، الجامعة الأسمرية الإسلامية، زليتن، ليبيا.

* البريد الإلكتروني: aliffarhat@yahoo.com

New Elzaki Integral Transformation Application on Studying the Bending Elastic Beams According to the Euler-Bernoulli Beam Theory

Safa Mohammed Matoug¹, Ali Farag Farhat^{2,*}, and Marwa Mohammed Matoug¹

⁽¹⁾ Department of Mathematics (Major Classrooms), Faculty of Science, Alasmariya Islamic University, Zliten, Libya.

⁽²⁾ Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasmariya Islamic University, Zliten, Libya.

المخلص

في السنوات الأخيرة تم اكتشاف العديد من التحويلات التكاملية والتي استخدمت في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية بالإضافة إلى حل المعادلات التكاملية التي تمثل العديد من المسائل المتنوعة في علوم الرياضيات والفيزياء والهندسة والإحصاء والعلوم الحيوية والعلوم الطبية. يهدف هذا البحث لحل مسائل في علم الميكانيكا الهندسية لاسيما في نظرية المرونة الخطية مستخدمين تحويل إلزاكي التكاملي. وذلك بخطوات مشابهة لتلك المستخدمة في الحل باستخدام تحويل لابلاس التكاملي. وقد تم إيجاد الحلول الفعلية لمسألة إنحناء العوارض للمعادلة التفاضلية المنظمة للمسألة وفق النظرية الشهيرة، نظرية أويلر - بيرنولي وذلك في حالات مختلفة من الشروط الحدية. تم استنتاج أن تحويل إلزاكي يمكن أن يطبق بشكل مشابه لتحويل لابلاس لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية وفق شروط مرفقة.

الكلمات الدالة: إنحناء العوارض المرنة، تحويل إلزاكي التكاملي، العوارض المثبتة، العوارض المدعمة ببساطة، العوارض المثبتة من جانب والحرّة من الجانب الآخر.

Abstract

In recent years, several integral transformations have been presented and applied to solving some ordinary and partial differential equations, as well as to solving integral equations that represent some diverse problems in



mathematics, physics, engineering, statistics, biological sciences, and medical sciences. This research aims to solve problems in engineering mechanics, particularly in linear elasticity theory, using the Elzaki integral transformation. The steps are similar to those used in solving problems with the use of Laplace integral transformation. The exact solutions of the elastic beam bending problem, which is represented by a differential equation according to the well-known Euler-Bernoulli theory when the beam is subjected to various boundary conditions. It was concluded that the Laplace transform can be applied analogously to the Laplace transform in finding solutions of differential equations under the specified boundary conditions.

Keywords: Elastic beam bending, Elzaki integral transformation, Clamped beams, Simply supported beams, Clamped beams at one edge and free at the other edge.

1. المقدمة

دراسة التحويلات التكاملية وتطبيقاتها من المواضيع البحثية التي أصبحت موضع اهتمام العديد من الباحث والأكاديميين بتخصصي الرياضيات البحث والتطبيقية بالإضافة إلى الباحث في الجانب التطبيقي لهذا التحويلات بتخصصات متنوعة بالعلوم التطبيقية الأخرى كالفيزياء والإحصاء وبعض التخصصات الهندسية لحل مسائل مختلفة بمعادلات تفاضلية عادية وجزئية مرفقة بشروط ابتدائية وحدية وكذلك معادلات تكاملية. أقدم الدراسات النظرية في موضوع التحويلات التكاملية والأكثر شيوعاً من حيث التطبيقات المتنوعة في العلوم الرياضية والتطبيقية ترجع للعالم بيير سيمون لابلاس في أواخر سنوات القرن الثامن عشر (Nuruddeen et al., 2018).

العديد من التحويلات التكاملية تم إيجادها بعد تحوي لابلاس منها على سبيل الذكر لا الحصر تحويل هيلبرت ودافيد فون (Hilbert, 1989) وتحويل إلزكي التكامل (Elzaki & Elzaki, 2011a) وتحويل أبوده التكامل (Aboodh, 2013) وتحويل سي التكامل (Mansour et al., 2021) وتحويل شاهو التكامل (Maitama & Zhao, 2019) وتحويل GF1 التكامل (Gwila & Farhat, 2022a) وتحويل GF2 التكامل (Gwila & Farhat, 2022b) وغير ذلك من التحويلات. التطبيقات الميكانيكية من أحد التطبيقات للتحويلات التكاملية التي اهتم به العديد من الباحث لحل مسائل القيم الابتدائية التي تصف مسائل ميكانيكية متنوعة. مسألة إنحناء الصفائح والعوارض المرنة من المسائل التي تدرس من قبل الرياضيين والمهندسين وكذلك الفيزيائيين لاسيما انحناء الصفائح والعوارض المرنة المقوى بالألياف. نظرية أولر-بيرنولي من ضمن النظريات التقريبية التي تدرس إنحناء العوارض المرنة المقوى بألياف وهي حالة خاصة من نظرية إنحناء الصفائح المرنة بمواصفات مشابهة. تم تحديث نظرية أولر-بيرنولي بشروط حدية متعددة في حالة تضمين فرضية قدرة الألياف لمقاومة الثني بالمعادلة التفاضلية الممثلة للمسألة سنة 2017 (Farhat & Gwila, 2017) والمنبثقة من دراسات سابقة اهتمت بإيجاد حلول بنظرية المرونة

الخطية لمسائل الانحناء الإستاتيكي والديناميكي للصفائح المرنة المقواة بألياف لها القدرة على مقاومة الشد (Farhat & Soldatos, 2015; Farhat, 2013). تم تطبيق تحويل إلزافي التكامل لإيجاد الحل لمسألة إنحناء العوارض المقوى بألياف مرنة وفق نظرية أويلر- برنولي في حالة واحدة فقط للشروط الحدية وهي العوارض المرنة المدعمة بشكل بسيط عند حافتي العوارض (Elzaki et al., 2012a). الهدف الأساسي لهذا البحث هو دراسة إيجاد الحل لمسألة إنحناء العوارض المقوى بألياف مرنة وفق نظرية أويلر- برنولي في حالات مختلفة من الشروط الحدية وهي العوارض المدعمة بشكل بسيط والعوارض المثبتة من الجانبين والعوارض المثبتة من جانب والمدعمة بشكل بسيط من الجانب الآخر والعوارض المثبتة من جانب والحرّة من الجانب الآخر.

2. تعريف تحويل إلزافي

تم تعريف تحويل إلزافي للدوال على المجموعة A كالتالي (Elzaki et al., 2012b):

$$A = \{f(t): \exists M; k_1, k_2 > 0: f(t) < Me^{\frac{|t|}{k_i}}, \text{ if } t \in (-1)^i \times [0, \infty)\} \rightarrow (1)$$

حيث v بارامتر، $M > 0, k_1, k_2 \in \infty$ سيتم تعريف تحويل إلزافي بواسطة الصيغة التالية:

$$T(v) = E\{f(t)\} = v \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t}{v}} dt; v \in [-k_1, k_2] \rightarrow (2)$$

أو بما يعادلها:

$$T(v) = E\{f(t)\} = v^2 \int_0^\infty f(vt) e^{-t} dt; k_1, k_2 > 0 \rightarrow (3)$$

لقد ثبت أن تحويل إلزافي له خصائص الحفاظ على الوحدة، ويمكن استخدامها لحل المشاكل دون اللجوء إلى مجال التردد، هذه واحدة من مزايا هذا التحويل الجديد خصوصاً في المشاكل ذات الأبعاد الفيزيائية (Elzaki & Elzaki, 2011b).

3. بعض خصائص تحويل إلزافي

سيعرض في هذا البند تحويل إلزافي للمشتقة إلى جانب ذكر بعض الخصائص الأخرى (Elzaki et al., 2012b):

إذا كانت $T(v)$ تحويل إلزافي للدالة $f(t)$ فإن:

$$E\{f^{(2)}(t)\} = \frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0) \quad [1-3]$$

$$E\{f^{(n)}(t)\} = \frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2+k-n} f^{(k)}(0) \quad [2-3]$$

$$E\{af(t) \pm bg(t)\} = aE\{f(t)\} \pm bE\{g(t)\} \quad [3-3]$$

حيث a, b ثوابت $g(t), f(t)$ دوال في الزمن.

$$E\{tf^{(1)}(t)\} = v^2 \frac{d}{dv} \left[\frac{T(v)}{v} - vf(0) \right] - v \left[\frac{T(v)}{v} - vf(0) \right] \quad [4-3]$$

4. دالة الخطوة المزاحة لتحويل إلزاكي

بما أن تحويل إلزاكي لدالة الوحدة $e^{-\frac{a}{v}}$ $E\{u(t-a)\} = v^2 e^{-\frac{a}{v}}$ لكل $v > 0$ إذا كانت $E\{f(t)\} = T(v)$ فإن:

$$E\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-\frac{a}{v}} T(v) \rightarrow (1)$$

حيث $u(t-a)$ هي دالة الخطوة المزاحة (Kim (2013).

5. مسألة إنحناء العوارض (Beams bending problem)

إذا انطبقت عارضة أفقية على محور x في النظام الكارتيبي xy وكانت مركزة بحالات مختلفة عند حافتي العارضة بحيث تنحني العارضة تحت تأثير الأحمال الرأسية، ويسمى منحنى الانحناء بمنحنى المرونة (Spiegel, 1986). توضح الأشكال (4-1) حالات مختلفة لتثبيت العوارض



شكل 2: عارضة مدعمة ببساطة من جانب ومثبتة من الجانب الآخر



شكل 1: عارضة مدعمة بشكل بسيط من الجانبين



شكل 4: عارضة مثبتة من جانب وحررة من الجانب الآخر



شكل 3: عارضة مثبتة من الجانبين

والتي سيناظرها شروط حدية مختلفة وفق أوضاع العارضات عند النهايتين A, B .

وتنظم هذه المسألة نظريات متعددة لإيجاد دالة الانحناء في علم نظرية المرونة وذلك لتحديد إنحناء العارضة $y(x)$ الناتج من حمل الانحناء الموزع $W(x)$ لكل وحده طول. وسيتم في هذا البحث

حل المعادلة التفاضلية وفق نظرية أويلر برنولي المرفقة بشروط حدية مختلفة مستخدمين تحويل إلزافي التكاملية إذ تأخذ المعادلة التفاضلية الشكل التالي:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \rightarrow (1)$$

حيث E معامل المرونة "معامل يونج"، I هو عزم القصور الذاتي للمقطع العرضي للعارضة، يرمز EI إلى صلابة الإنحناء لهيكل العارضة مع الشروط الحدية أو الابتدائية التالية (Prakash, 2017).
إذا كانت العارضة:

— مثبتته "مدعّمه Clamped": $y(x) = y'(x) = 0$ حيث أن: $x = 0$ أو $x = L$.

— عارضه ذات دعم بسيط أو نهاية مفصليته "Simply Supported End":

$$y(x) = y''(x) = 0$$

— نهاية حرة "Free end": $y''(x) = y'''(x) = 0$

للاختصار سيرمز للعارضة المثبتة بأحكام الرمز C والمثبتة ببساطه بالرمز S والرمز F للنهية الحرة.

1.5. العارضة المثبتة عند طرفيها

تطبيق على عارضه مثبتته بإحكام من طرفيها (CC) وهو اختصار إلى Clamped طولها L تحمل ثقلًا منتظمًا قدره W_0 لكل وحده طول، فلتعيين مقدار الإنحناء كدالة عند أي موضع x على العارضة يمكن استخدام معادلة أويلر- برنولي:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI}$$

حيث أن $y(x)$ هي دالة الانحناء؛ $W(x)$ هي دالة التحميل؛ EI معامل الصلابة وهو ثابت.
فإن $W(x) = W_0$ هذا يعني أن:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \rightarrow (1)$$

بما أن العارضة مدعّمة (CC) فإن:

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y'(0) = 0 \\ y(L) &= y'(L) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow (2)$$

أي أنه لا يوجد إنحناء ولا ميل عند طرفي العارضة ولكن هناك بعض المقادير التي يلزم التعويض بها عند استخدام تحويل إلزافي ويجب فرضها كثوابت لتعيينها باستخدام الشروط الحدية في (2) لاحقاً، وعليه بفرض أن:

$$\left. \begin{aligned} y'''(0) &= c_2 \\ y''(0) &= c_1 \end{aligned} \right\} (3)$$

الحل باستخدام تحويل إلزاكي فيكون بالتأثير بتحويل إلزاكي لطرفي المعادلة (1):

$$E\left\{\frac{d^4 y(x)}{dx^4}\right\} = E\left\{\frac{W_0}{EI}\right\}$$

ومن الخاصية [2-3] حيث $T(v) = E\{y(x)\}$

$$\frac{T(v)}{v^4} - v^{-2}y(0) - v^{-1}y'(0) - y''(0) - vy'''(0) = \frac{W_0}{EI}v^2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية في المعادلة (2) والقيم الابتدائية في المعادلات (3):

$$\frac{T(V)}{V^4} - C_1 - VC_2 = \frac{W_0}{EI}V^2$$

بحل المعادلة بالنسبة لـ $T(v)$:

$$T(v) = \frac{W_0 v^6}{EI} + c_1 v^4 + c_2 v^5$$

بأخذ تحويل إلزاكي العكسي للطرفين:

$$Y(x) = E^{-1}\{T(v)\} = E^{-1}\left\{\frac{W_0 v^6}{EI}\right\} + E^{-1}\{c_1 v^4\} + E^{-1}\{c_2 v^5\}$$

من الخاصية [3-3]:

$$Y(x) = \frac{W_0}{EI} E^{-1}\{v^6\} + c_1 E^{-1}\{v^4\} + c_2 E^{-1}\{v^5\}$$

بضرب وقسمة الحد الاول في 24 وبضرب وقسمة الحد الثاني في 2 وبضرب وقسمة الحد الثالث في 6:

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI} E^{-1}\{24v^6\} + \frac{c_1}{2} E^{-1}\{2v^4\} + \frac{c_2}{6} E^{-1}\{6v^5\}$$

ومن خلال الجدول لتحويل إلزاكي (Kim, 2013) يكون:

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI} x^4 + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3 \rightarrow (7)$$

باستخدام الشروط الحدية في المعادلة (2) لإيجاد قيمة الثوابت c_2, c_1 :

$$Y(L) = \frac{W_0}{24EI} L^4 + \frac{c_1}{2} L^2 + \frac{c_2}{6} L^3 = 0 \rightarrow (8)$$

$$Y'(L) = \frac{W_0}{6EI} L^3 + c_1 L + \frac{c_2 L^2}{2} = 0 \rightarrow (9)$$

بحل المعادلتين (8) و (9) انيا:

$$c_1 = \frac{W_0 L^2}{12EI}, c_2 = -\frac{W_0 L}{2EI}$$

بالتعويض بقيمته c_2, c_1 المعادلة (7):

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI} x^4 + \frac{W_0 L^2}{24EI} x^2 - \frac{W_0 L^3}{12EI} x^3$$

$$\therefore Y(x) = \frac{W_0 x^2}{24EI} [x - L]^2$$

وهو الحل المتحصل عليه في المرجع (Spiegel, 1965).

2.5. العارضة المدعمة ببساطة عند طرفيها

التطبيق الثاني يوضح عارضة سلطت عليها ثقل ممثلة بدالة متصلة على فترتين. يرمز للعارضة المدعمة ببساطة (SS) عند $x = L, x = 0$ والتي تحمل ثقلاً منتظم التوزيع بالصيغة التالية:

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ W_0 \frac{L}{3} & \frac{L}{3} \leq x \leq L \end{cases}$$

فالمسألة هي كيفية التعبير عن دالة الانحناء y عند أي موضع على العارضة، وعليه من معادلة أويلر-برنولي:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{W_x}{EI} \rightarrow (1), 0 < x < L$$

لكن الدالة $W(x)$ متصلة على فترات لذلك يمكن التعبير عنها كدالة خطوة كما يلي:

$$w(x) = W_0 \left(u\left(x - \frac{L}{3}\right) - u(x - L) \right)$$

وعليه يمكن التعبير عن المعادلة (1):

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \left(u\left(x - \frac{L}{3}\right) - u(x - L) \right) \rightarrow (2)$$

العارضة من نوع (SS) عند $x = L, x = 0$ وعليه:

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y''(0) = 0 \\ y(L) &= y''(L) = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

أي لا يوجد عزوم أو إنحناءات عند $x = L, x = 0$ وبحيث فرض قيم ابتدائية:

$$y'(0) = c_1, y'''(0) = c_2 \rightarrow (4)$$

ويمكن تحديد قيمتها من خلال الشروط الحدية لاحقا، ولإيجاد الحل باستخدام تحويل إلزاكي تكون الخطوة الأولى، التأثير بتحويل إلزاكي لطرفي المعادلة (2).

$$E\left\{\frac{d^4 Y(x)}{dx^4}\right\} = E\left\{\frac{W_0}{EI} u\left(x - \frac{L}{3}\right) - u(x - L)\right\}$$

باستخدام الخاصية [2-3] للطرف الأيسر ومن خلال جدول تحويل إلزاكي (Kim, 2013) للطرف الأيمن:

$$T(v) = E\{Y(X)\} \text{ حيث:}$$

$$\frac{T(v)}{v^4} - v^{-2}Y(0) - v^{-1}Y'(0) - Y''(0) - vY'''(0) = \frac{W_0}{EI} v^2 e^{-\frac{L}{3v}}$$

باستخدام الشروط الابتدائية في المعادلة (3) والمعادلة (4):

$$\frac{T(v)}{v^4} - v^{-1}c_1 - vc_2 = \frac{W_0}{EI} v^2 e^{-\frac{L}{3v}} - \frac{W_0}{EI} v^2 e^{-\frac{L}{v}}$$

بحل المعادلة بالنسبة لـ $T(v)$:

$$T(v) = \frac{W_0}{EI} v^6 e^{-\frac{L}{3v}} - \frac{W_0}{EI} v^2 e^{-\frac{L}{v}} + v^3 c_1 + v^5 c_2$$

باستخدام تحويل إلزاكي العكسي:

$$Y(x) = E^{-1}\left\{\frac{W_0}{EI} v^6 e^{-\frac{L}{3v}} - \frac{W_0}{EI} v^2 e^{-\frac{L}{v}}\right\} + E^{-1}\{v^3 c_1\} + E^{-1}\{v^5 c_2\}$$

ومن دالة الخطوة المزاحة لتحويل إلزاكي الخاصية بالبند 4:

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI} \left[\left(x - \frac{L}{3}\right)^4 u\left(x - \frac{L}{3}\right) - (x - L)^4 u(x - L) \right] + xc_1 + \frac{x^3}{6} c_2$$

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_1}{2}x + \frac{c_2}{6}x^3; 0 \leq x < \frac{L}{3} \\ \frac{W_0}{24EI} \left(x - \frac{L}{3}\right)^4 + \frac{c_1}{2}x + \frac{c_2}{6}x^3; \frac{L}{3} \leq x \leq L \end{array} \right\} \quad (9)$$

باستخدام الشروط الحدية في المعادلة (2) لتعيين قيم الثوابت c_2, c_1 :

$$Y(L) = \frac{W_0}{24EI} \left(\frac{2}{3}L\right)^4 + \frac{c_1}{2}L + \frac{c_2}{6}L^3 = 0 \rightarrow (10)$$

$$Y''(L) = \frac{W_0}{2EI} \left(\frac{2}{3}L\right)^2 + \frac{c_2}{6}L = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-2W_0L}{9EI} \rightarrow (11)$$

بالتعويض بقيمه C_2 في المعادلة (10):

$$c_1 = \frac{7W_0L^3}{243EI} \rightarrow (12)$$

بالتعويض في (9) بالمعادلتين (11) و (12):

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{7W_0L^3}{243EI}x - \frac{W_0L}{27EI}x^3; 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ \frac{W_0}{24EI}(x - \frac{L}{3})^4 + \frac{7W_0L^3}{243EI}x - \frac{W_0L}{27EI}x^3; \frac{L}{3} \leq x \leq L \end{array} \right\}$$

3.5. العارضة المثبتة عند أحد طرفيها والحرّة عند طرفها الآخر

هذا التطبيق يوضح عارضه من نوع (CF) حيث ركيّزتها مثبتة عند $x = 0$ وحرّة التثبيت عند $x = L$ سلط عليها ثقل مركز P_0 عند $x = L$ ، فيمكن حساب دالة الإنحناء من معادلة أويلر-برنولي:

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \rightarrow (1)$$

حيث $W(x)$ هي دالة التحميل مسلطه عنده $x = L$ بمقدار P_0 ومن تعريف داله النبضية-Delta function:

$$W(x) = P_0\delta(x - L)$$

• العارضة مثبتة بإحكام عند $x = 0$ هذا يشير إلى انعدام الميل والإنحناء عند تلك النقطة:

$$Y(0) = Y'(0) = 0$$

• كذلك العارضة حرّة التثبيت عند $x = L$ فإن العزم وقوه القص عند تلك النقطة:

$$Y''(L) = Y'''(L) = 0$$

تمكن هذه الشروط الابتدائية مع الشروط الحدية حل لهذه المعادلة (هناك بعض القيم يجب التعويض عنها بنوايت).

لتعيين قيمها بالشروط الحدية لاحقا وهي $Y''(0) = c_1, Y'''(0) = c_2$

وتكون الخطوة الأولى للإيجاد الحل باستخدام تحويل إلزافي هي التأثير بتحويل إلزافي للمعادلة (1):

$$E\left\{\frac{d^4Y(x)}{dx^4}\right\} = E\left\{\frac{P_0\delta(x - L)}{EI}\right\}$$

ومن الخاصية [2-3] للطرف الأيسر وتحويل دالة دلتا من جدول تحويل (Kim, 2013) للطرف الأيمن

$$T(v) = E\{Y(x)\}$$

$$\frac{T(v)}{v^4} - v^{-2}Y(0) - v^{-1}Y'(0) - vY''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI}ve^{-\frac{L}{v}}$$

ثم تحويل الحد الأيمن من خلال جدول تحويل إلزافي (Kim, 2013) باستخدام الشروط الابتدائية:

$$\frac{T(v)}{v^4} - c_1 - vc_2 = \frac{P_0 v e^{-\frac{L}{v}}}{EI}$$

لحل المعادلة بالنسبة لـ $T(v)$:

$$T(v) = \frac{P_0 v^5 e^{-\frac{L}{v}}}{EI} + c_1 v^4 + c_2 v^5$$

بأخذ تحويل إلزاكي العكسي لطرفي المعادلة:

$$Y(x) = E^{-1}\{T(v)\} = E^{-1}\left\{\frac{P_0 v^5 e^{-\frac{L}{v}}}{EI} + c_1 v^4 + c_2 v^5\right\}$$

باستخدام جدول تحويل إلزاكي (Kim, 2013):

$$Y(x) = E^{-1}\left\{\frac{P_0 v^5 e^{-\frac{L}{v}}}{EI}\right\} + E^{-1}\{c_1 v^4\} + E^{-1}\{c_2 v^5\}$$

$$Y(x) = \frac{P_0}{6EI} (x-L)^3 u(x-L) + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2^2}{6} x^3$$

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3; 0 < x < L \\ \frac{P_0}{6EI} (x-L)^3 + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3; x = L \end{cases}$$

بالتعويض بالشروط الحدية يمكن إيجاد:

$$c_1 = \frac{P_0}{EI}, c_2 = -\frac{P_0}{EI}$$

وبالتالي تكون قيمه دالة الإنحناء:

$$Y(x) = \frac{P_0 L x^2}{2EI} - \frac{P_0 x^3}{6EI}; x \leq L$$

هذا الحل مطابق للحل المتحصل عليه في المرجع (Spiegl, 1965).

6. الخاتمة

في ختام هذا البحث والتي تلخص في عرض النتائج الرئيسية الجديدة التي تم إيجادها وكذلك توضيح الحدود أو ما تقتصر عليه هذه الدراسة ثم عرض الدراسات المستقبلية ذات العلاقة بهذه الدراسة. أهم النتائج التي تم الحصول عليها بهذا البحث هي إيجاد حلول فعلية للمعادلة التفاضلية المعروضة بالعديد من الدراسات السابقة وفق نظرية أولر - بيرنولي المرفقة بشروط حدية مختلفة وذلك بتطبيق جديد لتحويل إلزاكي التكاملية. إذ كانت الحلول الفعلية لمسألة الإنحناء الأسطواني للعوارض المرنة والمقوى بألياف مرنة في الحالات التالية: عوارض مدعمة ببساطة عند الحافتين وعوارض مثبتة عند



الحافتين وعوارض مثبتة عند حافة ومدعمة ببساطة عند الحافة الأخرى وكذلك عوارض مثبتة عند حافة وحررة عند الحافة الأخرى. ولما تتميز به التحويلات التكاملية بإيجاد الحلول الفعلية للمعادلات التفاضلية من إمكانية الحصول على الحلول الفعلية وليس التقريبية، يمكن أن يوصى بدراسة المسألة موضوع البحث في حالة العوارض المرنة المقواة بألياف لها القدرة على مقاومة الثني. بالإضافة إلى ذلك يمكن تطبيق تحويل إلزكي بالدراسات المستقبلية لإيجاد حلول معادلات تفاضلية وفق شروط لمسائل متنوعة في علوم الميكانيكا والفيزياء والإحصاء والأحياء وبعض العلوم الطبية.

المراجع

- Aboodh, K. S. (2013). The new integral transform: Aboodh transform. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(1), 35-43.
- Elzaki, T. M. & Elzaki, S. M. (2011a). On the ELzaki transform and systems of ordinary differential equations. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 113-119.
- Elzaki, T. M. & Elzaki, S. M. (2011b). On Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation with Variable Coefficients. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 6(1), 41-46.
- Elzaki, T. M., Ezaki, S. M., & Elnour, E. A. (2012a). Applications of new transform "Elzaki transform" to mechanics, electrical circuits and beams problems. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, 4(1), 25-34.
- Elzaki, T. M., Ezaki, S. M., & Elnour, E. A. (2012b). On The New Integral Transform"Elzaki Transform"Fundamental Properties Investigations and Applications. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, 4(1), 1-13.
- Farhat, A. F. (2013). *Basic problems of fibre reinforced structural components when fibres resist bending*. PhD thesis. University of Nottingham.
- Farhat, A. F., & Soldatos, K. P. (2015). Cylindrical bending and vibration of polar material laminates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22(11), 885-896.
- Farhat, A., & Gwila, N. (2017). Euler-Bernoulli Beam Theory in the Presence of Fiber Bending Stiffness. *IOSR Journal of Mathematics*, 13(3), 10-17.
- Gwila, N., & Farhat, A. (2022a). GF1 integral transform and its some applications. *Journal of Alasmarya University for Applied Sciences*, 7(2), 84-93.
- Gwila, N., & Farhat, A. (2022b). GF2 Integral transform and its some applications. *Journal of Basic Sciences*, 35(1), 143-155.



- Hilbert, D. (1989). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. In: Pietsch, A. (eds.) *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*. Teubner-Archiv zur Mathematik, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- Kim, H. J. (2013). The time shifting theorem and the convolution for Elzaki transform. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87(2), 261-271.
- Maitama, S., & Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transforms for solving differential equations. *International Journal of Analysis and Applications*, 17(2), 167-190.
- Mansour, E. A., Mehdi, S., & Kuffi, E. A. (2021). The new integral transform and its applications. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 12(2), 849-856.
- Nuruddeen, R. I., Muhammad, L., Nass, A. M., & Sulaiman, T. A. (2018). A review of the integral transforms-based decomposition methods and their applications in solving nonlinear PDEs. *Palestine Journal of Mathematics*, 7(1), 262-280.
- Prakash, K. P. (2017). Solving Initial Value Problems by using the Method of Laplace Transforms. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 41(3), 275-278.
- Spiegel, M. R. (1965). *Schaum's outline of theory and problems of Laplace transforms*. New York: McGraw-Hill.
- Spiegle, M. R. (1986). *Shaums Theory and Problems of Laplace Transforms*. McGraw-Hill.